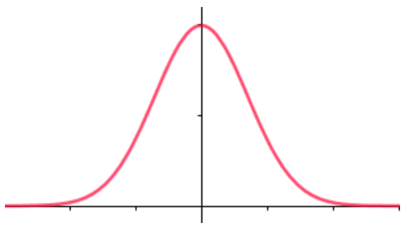
មូលដ្ឋានគ្រឹះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

Fundamental Probability Distribution



ម៉ុង ម៉ាក់

២០១៨

មូលដ្ឋានគ្រឹះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

Fundamental Probability Distribution

ម៉ុង ហ៊ា៉

២០១៨

មាតិកា

ទំព័រ

ជំពូក១៖ បំណែងចែកនៃអថេរចៃដន្យ

ជំពូក២៖ សង្ឃឹមគណិត

ជំពូក៣៖ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់មួយចំនួន

ជំពូក៤៖ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់មួយចំនួន

អារម្ភកថា

ក្រោមចំណងជើង «មូលដ្ឋានគ្រឹះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ» សៀវភៅនេះត្រូវបានចងក្រងឡើង ក្នុងគោលបំណងចូលរួមចំណែកផ្នែកឯកសារជាភាសាជាតិឱ្យបានកាន់តែច្រើនសំបូរបែប ជាប្រយោជន៍ដល់សិស្ស និស្សិត ព្រមទាំងអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវក្នុងវិស័យដែលទាក់ទង កាន់តែមានភាពងាយស្រួល។ សៀវភៅនេះ រៀបចំឡើងសម្រាប់អ្នកអានដែលមានចំណេះដឹងខ្លះៗហើយលើផ្នែកគណិតវិទ្យាគណនា ស្ថិតិវិទ្យាពិពណ៌នានិងមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃប្រូបាប៊ីលីតេ។

ខ្ញុំបាទសូមទទួលយកដោយរីករាយនូវរាល់ការរិះគន់កែលម្អនានាដើម្បីឱ្យស្នាដៃនេះកាន់តែមានភាពល្អប្រសើរ នៅក្នុងការបោះពុម្ពលើកក្រោយៗទៀត៕

ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៨

ម៉ុង ម៉ារ៉ា

សេចក្តីផ្តើម

ស្ថិតិវិទ្យាជាមុខវិជ្ជាសំខាន់មួយសម្រាប់ប្រើប្រាស់ក្នុងការវិភាគទិន្នន័យ និងការសិក្សាស្រាវជ្រាវ ទាំងនៅក្នុងវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមនិងវិទ្យាសាស្ត្រពិត។ ស្ថិតិវិទ្យាដែលក្នុងកម្រិតដំបូងសិក្សាអំពី*ស្ថិតិវិទ្យាពិពណ៌នា* មានផ្នែកដែលមានសារៈសំខាន់មួយ មុនចូលដល់*ស្ថិតិវិទ្យាសន្និដ្ឋាន*នោះគឺការសិក្សាពីប្រូបាប៊ីលីតេ។ នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងមិនបានសិក្សាអំពីមូលដ្ឋានគ្រឹះដំបូងនៃប្រូបាប៊ីលីតេទេ ប៉ុន្តែចាប់ផ្តើមពីអថេរចៃដន្យ រួចបន្តទៅបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ និងចុងក្រោយលើកយកបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសំខាន់ៗមួយចំនួនដែលគេប្រើប្រាស់ញឹកញាប់យកមកបង្ហាញ។

ជំពូក១

បំណែងចែកនៃអថេរចៃដន្យ

១.១ សេចក្តីផ្តើម

និយមន័យ១.១

តាង Ω គឺជាលំហគំរូតាង[1]។ អថេរចៃដន្យ X គឺជាអនុគមន៍ $X:\Omega \to \mathbb{R}$ ។ គេអាចនិយាយថា អថេរចៃដន្យគឺជាអនុគមន៍ដែលតម្លៃរបស់វាជាចំនួនពិតហើយ ត្រូវកំណត់ឡើងទៅតាមធាតុ នីមួយៗនៅក្នុងលំហគំរូតាង។

ឧទាហរណ៍១.១ បាល់ពីរត្រូវបានហូតយកចេញក្នុងរបៀបជាបន្តបន្ទាប់ដោយមិនដាក់ចូលទៅវិញពីថង់មួយ ដែលក្នុងនោះមានបាល់ពណ៌ក្រហមបួននិងបាល់ពណ៌ខ្មៅបី។ លទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចមាននិងតម្លៃ y របស់អថេរចៃដន្យ Y ដែលតាងឱ្យចំនួនបាល់ពណ៌ក្រហម គេចាប់បាន គឺ

លំហគំរូតាង	y
RR	2
BR	1
RB	1
BB	0

ឧទាហរណ៍១.២ អ្នកកាន់ឃ្លាំងនៃក្រុមហ៊ុនសំណង់មួយបានផ្តល់ត្រឡប់វិញនូវមួកសុវត្ថិភាពចំនួនបីដោយចៃដន្យ(at random)ទៅកម្មករបី

[1] សំណុំនៃលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចមាននៅក្នុងពិសោធន៍ប្រូបាប៊ីលីតេមួយ

នាក់វិញបន្ទាប់ពីយកទៅត្រួតពិនិត្យរួច។ បើសិនជាស្មីត(Smith) ចូន (Jones)និងប្រោន(Brown)តាមលំដាប់លំដោយ ទទួលយកមួកវិញ ចូរបង្ហាញគំរូតាងនៃចំនួនរបៀបទាំងអស់ដែលអាចមាន នៃការផ្តល់មួកទៅឱ្យអ្នកទាំងបី រួចរកតម្លៃ m នៃអថេរ M ដែលតាងឱ្យចំនួន កម្មករដែលទទួលបានមួករបស់ខ្លួនត្រឹមត្រូវមកវិញ។

ដំណោះស្រាយ

តាងS, JនិងBគឺជាមួករបស់Smith Jones និងBrown រៀងគ្នា នោះយើងបាន៖

លំហគំរូតាង	តម្លៃ m
SJB	3
SBJ	1
BJS	1
JSB	1
JBS	0
BSJ	0

នៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះ លំហគំរូតាងមានធាតុរាប់អស់(ចំនួន៦)។

ម្យ៉ាងវិញទៀត បើសិនជាគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយត្រូវបានបោះរហូតដល់ចេញលេខ៥(⚄) ដោយតាងFជាលទ្ធផលលេខ៥ ហើយNលទ្ធផលជាលេខផ្សេងពី៥ នោះយើងបានលំហគំរូតាង

$$S = \{F, NF, NNF, NNNF, \ldots\}$$

ចំនួនធាតុនៅក្នុងលំហគំរូតាង ថ្វីបើអាចរាប់បាន ប៉ុន្តែអាចរាប់មិនអស់ ព្រោះថា

លទ្ធផលដែលចេញលេខ៥ អាចកើតឡើងនៅក្នុងការបោះលើកទី១ ឬលើកទី២ ឬលើកទី៣ ឬជាបន្តបន្ទាប់។

ឧទាហរណ៍១.៣ ពិនិត្យមើលសភាពនៃផលិតផលនៅក្នុងខ្សែសង្វាក់ផលិតកម្មមួយ។ វាអាចត្រូវគេចាត់ទុកថាខូច(defective)ឬល្អ(non-defective)។ កំណត់អថេរចៃដន្យ X ដោយ

$$X = \begin{cases} 1, & \text{បើផលិតផលនោះខូច} \\ 0, & \text{បើផលិតផលនោះល្អ} \end{cases}$$

អថេរចៃដន្យដែលតម្លៃរបស់វាស្មើ0 ឬ 1 (តម្លៃមានតែពីរគត់) ហៅថាអថេរចៃដន្យ*ប៊ែនូយី* (Bernoulli random variable) ។

មានករណីជាច្រើនដែលអថេរចៃដន្យមានលក្ខណៈជា*ការបែងចែកប្រភេទ*(categorical variable)។ អថេរទាំងនេះគេច្រើនហៅឈ្មោះថា*អថេរទីងមោង*(dummy variable)។

ឧទាហរណ៍១.៤ ស្ថិតិវិទូប្រើប្រាស់ផែនការនៃការធ្វើ គំរូតាងក្នុងការទទួលយកឬបដិសេធន៍នូវសម្ភារៈឬផលិតផលក្នុងចំនួនច្រើន។ ឧបមាថាផែនការនៃការធ្វើគំរូតាងមួយទាក់ទងទៅនឹងការធ្វើគំរូតាងដោយឯករាជ្យនៃវត្ថុចំនួន10 ចេញពីក្នុង100ដែលមានវត្ថុខូចចំនួន12នៅក្នុងនោះ។

តាង X គឺជាអថេរចៃដន្យដែលកំណត់ចំនួនវត្ថុខូចនៅក្នុងគំរូតាងទំហំ10។ ក្នុងករណីនេះ អថេរចៃដន្យយកតម្លៃ0, 1, 2, …, 10។

ឧទាហរណ៍១.៥ តាង X ជារយៈពេលនៃការរង់ចាំរថយន្តក្រុងដែលមកដល់រាល់15នាទីម្តងនៅឯចំណតមួយកន្លែង។ អថេរចៃដន្យ X គឺជាតម្លៃ x ដែល $0 \le x \le 15$ ។

និយមន័យ១.២

បើលំហគំរូតាងមួយរួមមាននៅក្នុងនោះនូវចំនួនរាប់អស់នៃធាតុឬដែលអាចមាននៅក្នុងនោះនូវចំនួនធាតុដ៏ច្រើនដូចក្នុងស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ដែល

មិនទាល់ នោះគេហៅលំហគំរូតាងនោះថា *លំហគំរូតាងដាច់* (discrete sample space)។ ក្នុងន័យនេះ ចំនួនធាតុក្នុងលំហគំរូតាង អាច*រាប់អស់ឬរាប់បាន*[2]។

និយមន័យ១.៣

បើលំហគំរូតាងមួយមាននៅក្នុងនោះនូវធាតុដែលមានចំនួនមិនអាចរាប់បាន នោះគេហៅលំហគំរូតាងនេះថា *លំហគំរូតាងជាប់* (continuous sample space)។

អថេរចៃដន្យមួយហៅថា *អថេរចៃដន្យដាច់* (discrete random variable)បើសំណុំរបស់វាជាសំណុំមានធាតុរាប់បាន ដូចក្នុងឧទាហរណ៍១.១ ដល់១.៤។ ចំពោះអថេរចៃដន្យមួយដែលកំណត់យកតម្លៃនៅលើវង្វាស់ជាប់ នោះគេហៅថា *អថេរចៃដន្យជាប់* ដូចក្នុងឧទាហរណ៍១.៥។

នៅក្នុងបញ្ហាជាក់ស្តែងមួយចំនួនធំ អថេរចៃដន្យជាប់បង្ហាញនូវទិន្នន័យដែលបានពីការវាស់វែង ដូចជាកម្ពស់ ទម្ងន់ ចម្ងាយ រង្វាស់កម្រិតសីតុណ្ហភាព អាយុជាដើម។ រីឯអថេរចៃដន្យដាច់តាងឱ្យទិន្នន័យបានមកពីការរាប់។

១.២ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់ (Discrete Probability Distribution)

អថេរចៃដន្យដាច់មួយគឺជាទំនាក់ទំនងដែលភ្ជាប់តម្លៃនីមួយៗរបស់វាជាមួយនិងប្រូបាប៊ីលីតេជាក់លាក់មួយ។

តាមរយៈឧទាហរណ៍១.២យើងបាន

---

[2] *រាប់អស់*មានន័យថាវាមានចំនួនកំណត់ជាក់លាក់ដូចជាមាន៥ឬ៦ឬ១០ធាតុជាដើម។ *រាប់បាន* ចង់សំដៅទៅលើការដែលយើងគ្រាន់តែអាចរាប់វាតែមិនអស់ ដូចជាការរាប់0 ១ ២ ៣...ហើយខាងលើមិនកំណត់ថាដល់ត្រឹមណាទេ។

m	0	1	2
$P(M=m)$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

កត់សម្គាល់ថាតម្លៃ m រាប់បញ្ចូលទាំងអស់នូវលទ្ធផលដែលអាចកើតមានឡើង។ ដូច្នេះផលបូកប្រូបាប៊ីលីតេត្រូវស្មើនឹង1។ ជាញឹកញាប់គេតាងប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យ X ដោយ $f(x)$ ឬ $g(x)$ ជាដើម។ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរ $f(x)=P(X=x)$។ មានន័យថាចំពោះតម្លៃអថេរចៃដន្យស្មើ3នោះគេសរសេរ $f(3)=P(X=3)$។ សំណុំនៃគូ $(x,f(x))$ ហៅថា *អនុគមន៍ប្រូបាប៊ីលីតេ* (Probability function) *អនុគមន៍ប្រូបាប៊ីលីតេដុល*(probability mass function) ឬ*បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ*(probability distribution) របស់អថេរចៃដន្យ X ។

និយមន័យ១.៤

សំណុំនៃគូដែលប្រកាន់លំដាប់ $(x,f(x))$ គឺជាបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេរបស់អថេរចៃដន្យ X មួយ បើចំពោះ x នីមួយៗ៖

១) $f(x)\geq 0$

២) $\sum_x f(x)=1$

៣) $P(X=x)=f(x)$

ឧទាហរណ៍១.៦ ក្នុងការដឹកជញ្ជូនទៅកាន់ផ្សារលក់រាយមួយដើងដែលមានកុំព្យូទ័រយួរដៃ20គ្រឿង វាមានក្នុងនោះនូវកុំព្យូទ័រខូចចំនួនបីគ្រឿង។ បើសិនជាអតិថិជនម្នាក់ទិញ2គ្រឿងដោយចៃដន្យ ចូររកបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃចំនួនកុំព្យូទ័រខូចដែលអាចទិញចំ។

ដំណោះស្រាយ

តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលតម្លៃរបស់វាគឺជាចំនួនកុំព្យូទ័រខូចដែលអតិថិជនទិញចំ នោះ x អាចមានតម្លៃស្មើ0 1 ឬ 2។ ដូច្នេះយើងបាន

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{68}{95}$$

$$f(1)=P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{17}{1}}{\binom{20}{2}}=\frac{51}{190}$$

$$f(2)=P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{17}{0}}{\binom{20}{2}}=\frac{3}{190}$$

ដូច្នេះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X គឺ

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{68}{95}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

ឧទាហរណ៍១.៧ ចូររករូបមន្តសម្រាប់បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃចំនួនមុខផ្កាក្នុងករណីដែលកាក់មួយត្រូវគេបោះបួនដង។

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចមាននៅក្នុងសំណុំលំហគំរូតាងគឺ $2^4=16$ ។ ចំនួននេះគឺជាចំនួនករណីអាច មាន16របៀប។ ចំនួនករណីស្រប

ពោលគឺចំនួនករណីដែលយើងទទួលបានមុខផ្កា ឧទាហរណ៍ថាចំនួនបីដង គឺជាបន្សំក្នុង4ដោយយក3 មានន័យថា $\binom{4}{3}$ របៀប។ ជាទូទៅចំនួនមុខផ្កា x និងចំនួនមុខផ្កាប់ $4-x$ ក្នុងការបោះកាក់អាចកើតឡើងក្នុងចំនួន $\binom{4}{x}$ របៀបដែល x អាចយក តម្លៃ1 2 3 ឬ4។ ដូច្នេះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេគឺ

$$f(x)=\frac{1}{16}\binom{4}{x}, x=0,1,2,3,4$$

នៅក្នុងករណីជាច្រើន យើងត្រូវការគណនាប្រូបាប៊ីលីតេដែលតម្លៃនៃអថេរចៃដន្យ X តូចជាងឬស្មើនឹងតម្លៃ x ណាមួយ។ តាមរយៈការសរសេរ $F(x)=P(X\le x)$ នោះយើងកំណត់ $F(x)$ ជាអនុគមន៍បំណែងចែកកើន (cumulative distribution function, cdf)របស់អថេរចៃដន្យ X ។

និយមន័យ១.៥

អនុគមន៍បំណែងចែកកើន $F(x)$ របស់អថេរចៃដន្យដាច់ X មួយដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $f(x)$ គឺ

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x} f(t); -\infty<x<\infty$$

ចំពោះអថេរចៃដន្យ M នៅក្នុងឧទាហរណ៍១.២យើងមាន

$$F(0)=P(M\le 0)=f(0)=\frac{1}{3}$$

$$F(1)=P(M\le 1)=f(0)+f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

នោះអនុគមន៍បំណែងចែកកើននៃ M គឺ

$$F(m)=\begin{cases}0; \ m<0\\ \frac{1}{3}; \ 0\le m<1\\ \frac{5}{6}; \ 1\le m<2\\ 1; \ m\ge 2\end{cases}$$

ឧទាហរណ៍១.៨ រកអនុគមន៍បំណែងចែកកើននៃអថេរចៃដន្យ X នៅក្នុងឧទាហរណ៍១.៧។ ដោយប្រើ $F(x)$ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2)=3/8$។

ដំណោះស្រាយ

តាមការគណនាដោយផ្ទាល់ពីរូបមន្តក្នុងឧទាហរណ៍១.៧ យើងបាន

$f(0)=1/16, \ f(1)=1/4, \ f(2)=3/8,$

$f(3)=1/4, \ f(4)=1/16$

ដូច្នេះ

$$F(0)=f(0)=\frac{1}{16}$$

$$F(1)=f(0)+f(1)=\frac{5}{16}$$

$$F(2)=f(0)+f(1)+f(2)=\frac{11}{16}$$

$$F(3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=\frac{15}{16}$$

$$F(4)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1$$

ដូច្នេះយើងបាន

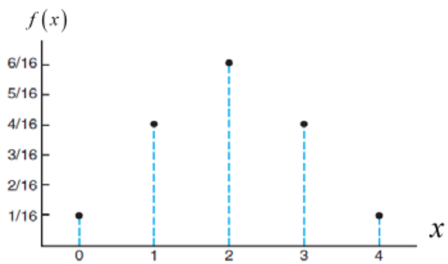
$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{16}, 0\le x<1\\ \frac{5}{16}, 1\le x<2\\ \frac{11}{16}, 2\le x<3\\ \frac{15}{16}, 3\le x<4\\ 1, x\ge 4\end{cases}$$

យើងបាន

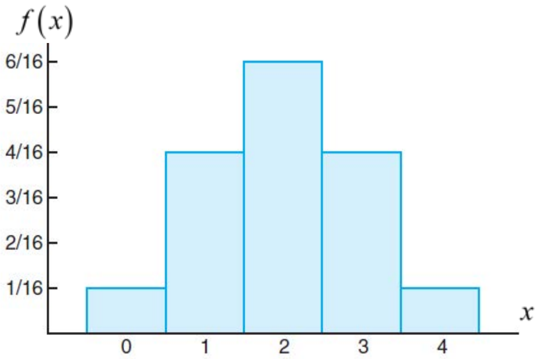
$$f(2)=F(2)-F(1)=\frac{11}{16}-\frac{5}{16}=\frac{3}{8}$$

វាមានអត្ថប្រយោជន៍ច្រើននៅក្នុងការមើលបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេក្នុងទម្រង់ជាក្រាហ្វិច។ គេអាចដៅចំណុច $(x, f(x))$ នៃឧទាហរណ៍១.៨ដើម្បីបានរូប១.១។ ដោយភ្ជាប់ចំណុចនីមួយៗទៅនឹងអ័ក្ស x ដោយបន្ទាត់ដាច់ៗ ឬជាប់ យើងនឹងទទួលបានក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ប្រូបាប៊ីលីតេដុល។ រូប១.១ ធ្វើឱ្យមានភាពងាយស្រួលក្នុងការមើលឃើញតម្លៃរបស់ X ដែលទំនងនឹងកើតឡើង ហើយវាក៏បានបង្ហាញនូវភាពស៊ីមេទ្រីនៃបំណែងចែកផងដែរ។

ក្រៅពីការដៅចំណុច $(x, f(x))$ គេអាចសង់ហ៊ីស្តូក្រាម (histogram) ដូចក្នុងរូប១.២។ រូបនេះហៅថា *ហ៊ីស្តូក្រាមប្រូបាប៊ីលីតេ* (probability histogram)។

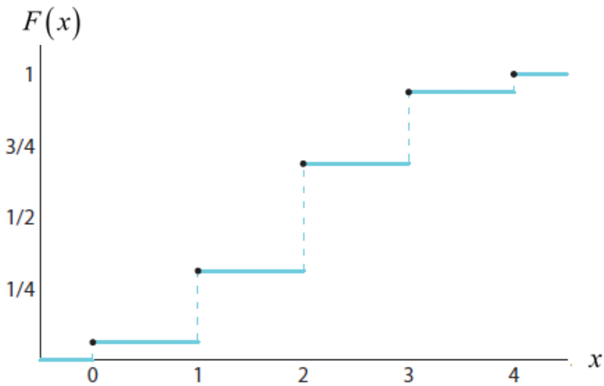


រូប១.១៖ ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ប្រូបាប៊ីលីតេដុល



រូប១.២៖ ហ៊ីស្តូក្រាមប្រូបាប៊ីលីតេ

ក្រាហ្វរបស់អនុគមន៍បំណែងចែកកើនក្នុងឧទាហរណ៍១.៧ដែលគេមើលឃើញថាជាអនុគមន៍កាំជណ្តើរនៅក្នុងរូប១.៣ បានមកពីការដៅចំណុច $(x, F(x))$។



រូប១.៣៖ អនុគមន៍បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់

១.៣ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់(Continuous Probability Distributions)

កាលណាយើងនិយាយអំពីតម្លៃអថេរចៃដន្យដាច់ គឺយើងនិយាយអំពីតម្លៃនៅក្នុងចន្លោះ។ យើងពុំផ្តោតទៅលើតម្លៃត្រង់ចំណុចមួយៗដាច់ៗនោះទេ។ ឧទាហរណ៍ថា X ជាអថេរចៃដន្យតាងឱ្យកម្ពស់របស់ក្មេងប្រុសនៅអាយុក្រោម២០ឆ្នាំ។ នៅចន្លោះតម្លៃពីរដូចជា159.75cm និង170.02cmមានតម្លៃដែលជារង្វាស់កម្ពស់ចំនួនមិនអាចកំណត់បាន(រាប់មិនបាន)។ នៅក្នុងបរិបទអថេរជាប់ ប្រូបាប៊ីលីតេនៅត្រង់ចំណុចណាមួយនៃតម្លៃអថេរ X ដែល មិនមែនជាសំណុំតម្លៃនៅក្នុងចន្លោះ គឺត្រូវសន្មតថាស្មើសូន្យ។ ឧទាហរណ៍ថា ប្រូបាប៊ីលីតេដែលក្មេងប្រុសអាយុក្រោម២០ម្នាក់មានកម្ពស់ត្រឹម160cmគត់តែងម្តងគឺស្មើនឹងសូន្យព្រោះ ថាព្រឹត្តិការណ៍បែបនេះកម្រនឹងកើតមានឡើងខ្លាំងណាស់។ដូច្នេះហើយទើបគេនិយាយផ្តោតតែអំពីសំណុំតម្លៃដែលស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះជាជាងតម្លៃទោលណាមួយ។

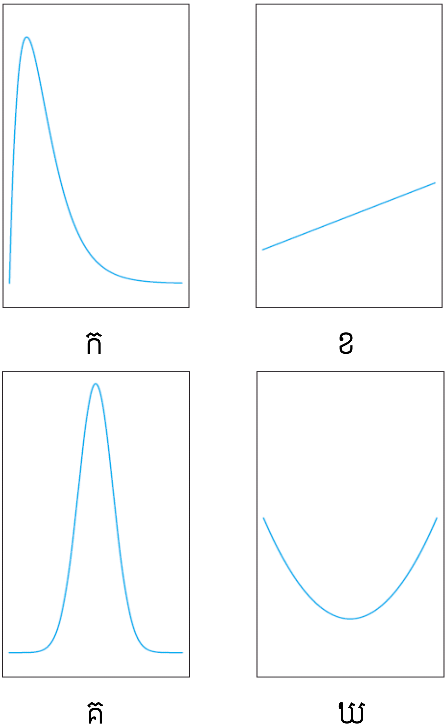
កត់សម្គាល់ថាបើ X គឺជាអថេរចៃដន្យជាប់នោះ

$$\begin{aligned} P(a < X \le b) &= P(a < X < b) + P(X = b) \\ &= P(a < X < b) \end{aligned}$$

មានន័យថាយើងមិនខ្វល់ថាតើតម្លៃរបស់អថេរ ត្រូវរាប់បញ្ចូលទាំងចំណុចនៅចុងចន្លោះដែរឬក៏អត់នោះទេ ដែលការនេះវាខុសពីអ្វីដែលយើងនិយាយនៅក្នុងករណីអថេរដាច់។

នៅក្នុងករណីអថេរចៃដន្យដាច់ អនុគមន៍ $f(x)$ ហៅថា*អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ*(probability density function, pdf)ឬហៅត្រឹមតែ*អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ*(density function)របស់អថេរ X ។ ដោយសារតែ X ត្រូវកំណត់នៅលើលំហាគំរូតាងជាប់ នោះ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ដែលអាចមានចំណុចដាច់មួយចំនួនដូចជាអនុគមន៍ក្នុងគណិតវិទ្យាគណនា ផ្សេងៗទៀតដែរ។ តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេភាគច្រើនដែលយកមកអនុវត្តន៍

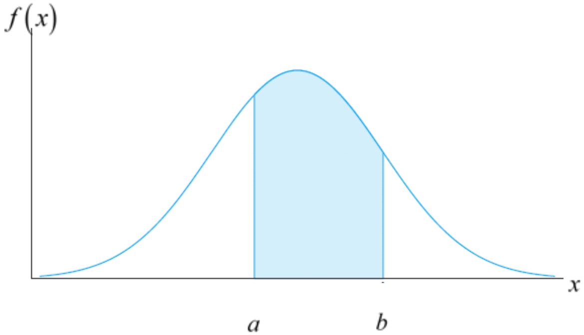
ប្រើប្រាស់នៅក្នុងការវិភាគទិន្នន័យតាមបែបស្ថិតិ គឺជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយក្រាហ្វរបស់វាអាចមានទម្រង់ផ្សេងៗដែលមានជាឧទាហរណ៍មួយចំនួនដូចនៅក្នុងរូប១.៤។ ម្យ៉ាងវិញទៀតដោយសារតែផ្ទៃក្រឡាត្រូវប្រើប្រាស់ដើម្បីតាងឱ្យប្រូបាប៊ីលីតេ ហើយប្រូបាប៊ីលីតេត្រូវតែមានតម្លៃលេខវិជ្ជមាន នោះក្រាហ្វរបស់អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេត្រូវស្ថិតតែនៅលើអ័ក្ស x ទាំងស្រុង។ ផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅចន្លោះក្រាហ្វនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីសដែលគណនានៅលើដែនកំណត់នៃ $f(x)$ ត្រូវស្មើនឹង1។ ជាទូទៅចន្លោះតម្លៃរបស់ X ដែល $f(x)$ កំណត់បាន តែងតែត្រូវបានពង្រីកបន្ថែមរហូតដល់សំណុំចំនួនពិតទាំងមូលដោយកំណត់ឱ្យ $f(x)$ ស្មើសូន្យ នៅលើផ្នែកពង្រីកបន្ថែមទាំងនោះ។



រូប១.៤៖ ទ្រង់ទ្រាយក្រាហ្វរបស់អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេមួយចំនួន

ក្នុងរូប១.៥ ប្រូបាប៊ីលីតេដែល X កំណត់តម្លៃនៅក្នុងចន្លោះ a និង b ស្មើទៅនឹងផ្ទៃក្រឡាជាស្រមោល ហើយកំណត់ដោយ

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



រូប១.៥៖ $P(a < X < b)$

និយមន័យ១.៦

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ(pdf)របស់អថេរចៃដន្យជាប់ X ហើយកំណត់បានលើសំណុំចំនួនពិត បើ៖

១) $f(x) \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

២) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

៣) $P(a < X < b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

ឧទាហរណ៍១.៩ ឧបមាថាភាពល្អៀងនៃសីតុណ្ហភាពប្រតិកម្ម(គិតជា ${}^0C$)នៅក្នុងការធ្វើពិសោធន៍មួយក្នុងបន្ទប់ពិសោធន៍គឺជាអថេរចៃដន្យជាប់ X ដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}, -1<x<2\\ 0, \text{ otherwhere}\end{cases}$$

ក) ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

ខ) ចូររក $P(0<X\le 1)$

ដំណោះស្រាយ

ក) តាមរូបមន្តអនុគមន៍យើងឃើញថា $f(x)\ge 0$ ។ ម្យ៉ាង វិញទៀត

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{9}\bigg|_{-1}^{2}=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=1$$

ដូច្នេះតាមនិយមន័យ១.៦ យើងបាន $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ។

ខ) $P(0<X\le 1)=\int_{0}^{1}\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{9}\bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{9}$

និយមន័យ១.៧

អនុគមន៍បំណែងចែកកើន (cumulative distribution function) $F(x)$ របស់អថេរចៃដន្យជាប់ X ដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $f(x)$ គឺ

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt; -\infty<x<\infty$$

ជាវិបាក យើងទាញបាន

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)$$

និង

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

ឧទាហរណ៍១.១០ ចំពោះអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេក្នុងឧទាហរណ៍១.៩។ ចូររក $F(x)$ ហើយគណនា $P(0<X\le 1)$

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $-1 < x < 2$ យើងបាន

$$F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x} f\left(t\right)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{t^2}{3}dt=\left.\frac{t^3}{9}\right|_{-1}^{x}=\frac{x^3+1}{9}$$

ដូច្នេះ

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0; & x<-1\\ \dfrac{x^3+1}{9}; & -1\le x<2\\ 1; & x\ge 2\end{cases}$$

$$P\left(0<X\le 1\right)=F\left(1\right)-F\left(0\right)=\frac{2}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$$

ដែលដូចគ្នាទៅនឹងលទ្ធផលដោយប្រើអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៅក្នុងឧទាហរណ៍ ១.៩។

ឧទាហរណ៍១.១១ ក្រុមហ៊ុនមួយបានដាក់គម្រោងមួយសម្រាប់ការដេញថ្លៃ ហើយបានធ្វើការប៉ាន់ប្រមាណនូវតម្លៃដេញថ្លៃដោយ b ។ ក្រុមហ៊ុនបានកំណត់ថាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៃការឈ្នះការដេញថ្លៃគឺ

$$f\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{5}{8b}, & \dfrac{2}{5}b\le y\le 2b\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

ចូររក $F\left(y\right)$ និងប្រើប្រាស់វាដើម្បីកំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេនៃតម្លៃដេញថ្លៃឈ្នះ តូចជាង b ដែលជាតម្លៃប៉ាន់ប្រមាណពីដំបូង។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\frac{2}{5}b\le y\le 2b$ នោះយើងបាន

$$F(y)=\int_{\frac{2}{5}b}^{y}\frac{5}{8b}dt=\left.\frac{5t}{8b}\right|_{\frac{2b}{5}}^{y}=\frac{5y}{8b}-\frac{1}{4}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<\frac{2}{5}b\\ \frac{5}{8b}y-\frac{1}{4}, & \frac{2}{5}b\le y<2b\\ 1, & y\ge 2b\end{cases}$$

ប្រូបាប៊ីលីតេដែលតម្លៃដេញថ្លៃតូចជាងតម្លៃប៉ាន់ប្រមាណពីដំបូងត្រូវគណនាដូចខាងក្រោម។

$$P(Y\le b)=F(b)=\frac{5}{8b}b-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

១.៤ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស

ការពិភាក្សាអំពីអថេរចៃដន្យនិងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេក្នុងផ្នែកពីមុនៗគឺនិយាយត្រឹមតែលំហគំរូតាងមួយវិមាត្រ ដែលនៅក្នុងនោះយើងកត់ត្រាលទ្ធផលនៃពិសោធន៍ជាតម្លៃដែលកំណត់ដោយអថេរចៃដន្យទោលមួយ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ក្នុងស្ថានភាពមួយចំនួន យើងត្រូវការកត់ត្រាព្រមគ្នានូវលទ្ធផលនៃអថេរចៃដន្យចំនួនលើសពីមួយ។ ជាឧទាហរណ៍យើងចង់វាស់នូវបរិមាណសំណើម P និងមាឌ V នៃឧស្ម័នដែលភាយចេញពីពិសោធន៍គឺមីមួយ។ វាបង្កើតបានជាលំហគំរូតាងវិមាត្រពីរដែលរួមមានលទ្ធផល (p,v)។ ជាឧទាហរណ៍មួយទៀត យើងចាប់អារម្មណ៍ភាពរឹងមាំ H និងកម្លាំងញែកចេញ (tensile strength) T នៃទង់ដែងដែលហូតត្រជាក់ចេញជាលទ្ធផល (h,t)។

នៅក្នុងការសិក្សាមួយដែលធ្វើឡើងនៅចុងឆ្នាំទី១ដើម្បីកំណត់នូវភាពទំនងនៃភាពជោគជ័យរបស់និស្សិតម្នាក់ៗក្នុងការរៀនសូត្រនៅមហាវិទ្យាល័យដោយផ្អែកទៅលើទិន្នន័យពីវិទ្យាល័យ យើងអាចប្រើលំហាគំរូតាងវិមាត្របីគឺកំណត់ត្រាអំពីពិន្ទុលើសម្បទា ពិន្ទុGPAនិងនិទ្ទេសពិន្ទុពីវិទ្យាល័យ។

បើ X និង Y គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់ពីរ នោះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់នៃការកើតឡើងជាមួយគ្នារបស់វាទាំងពីរអាចតាងដោយអនុគមន៍ដែលមានតម្លៃកំណត់ដោយ $f(x,y)$ ចំពោះគូ (x,y) ណាមួយនៅក្នុងដែនកំណត់នៃអថេរចៃដន្យ X និង Y ។ ជាទូទៅគេហៅអនុគមន៍នេះថា *បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស* (joint probability distribution) នៃ X និង Y ។ ដូច្នេះនៅក្នុងករណីអថេរដាច់ យើងបាន

$$f(x,y)=P(X=x,Y=y)$$

មានន័យថាតម្លៃ $f(x,y)$ ផ្តល់នូវប្រូបាប៊ីលីតេដែលលទ្ធផល x និង y កើតឡើងជាមួយគ្នា។ ឧទាហរណ៍៖ បើសិនជារថយន្តកង់១៨មួយគ្រឿង ទទួលបានសេវាលើផ្នែកកង់ ហើយ X ចម្ងាយគិតជាម៉ាយល៏ (mile) ដែលសំបកកង់អាចប្រើប្រាស់បានក្នុងការបើកបរ និង Y តាងឱ្យចំនួនសំបកកង់ដែលត្រូវការផ្លាស់ប្តូរចេញ នោះ $f(30000,5)$ តាងឱ្យប្រូបាប៊ីលីតេដែលសំបកកង់អាចប្រើប្រាស់បាន30000ហើយរថយន្តត្រូវការប្តូរសំបកកង់ថ្មីចំនួន៥។

និយមន័យ១.៨

អនុគមន៍ $f(x,y)$ គឺជាបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស (joint probability distribution) ឬអនុគមន៍ប្រូបាប៊ីលីតេដុល (probability mass function) នៃអថេរចៃដន្យដាច់ X និង Y បើសិនជា

១) $f(x,y)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ (x,y)

២) $\sum_x \sum_y f(x,y)=1$

៣) $P(X=x,Y=y)=f(x,y)$

ចំពោះដែន A នៅក្នុងប្លង់ xy យើងបាន

$$P\left[(x,y)\in A\right]=\sum\sum_{A} f(x,y)$$

ឧទាហរណ៍១.១២ ប៊ិចពីរត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យចេញពីប្រអប់មួយដែលមានមានប៊ិចខៀវបី ប៊ិចក្រហមពីរ និងប៊ិចបៃតងបី។ បើ X តាងឱ្យចំនួនប៊ិចខៀវ និង Y តាងឱ្យចំនួនប៊ិចក្រហមដែលគេជ្រើសរើសបាន ចូររក

ក អនុគមន៍បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស $f(x,y)$

ខ $P\left[(x,y)\in A\right]$ ដែល A គឺជាដែនដែលកំណត់ដោយ $\{(x,y)\,|\,x+y\leq 1\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តម្លៃនៃគូ (x,y) ដែលអាចមាន គឺ $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(0,2)$ និង $(2,0)$ ។

ក ជាឧទាហរណ៍ តម្លៃអនុគមន៍ $f(0,1)$ តាងឱ្យប្រូបាប៊ីលីតេដែលប៊ិចក្រហម១ និងប៊ិចបៃតងមួយត្រូវបានជ្រើសរើស។ ចំនួនករណីអាចក្នុងការជ្រើសរើសប៊ិចពីរ ទាំងអស់មាន $\binom{8}{2}=28$ ។ ចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសប៊ិចក្រហមមួយពីក្នុងចំណោមប៊ិចក្រហមពីរនិងបៃតង១ពីក្នុងចំណោម៣គឺ $\binom{2}{1}\binom{3}{1}=6$ ។ ដូច្នេះ $f(0,1)=6/28=3/14$ ។ ការគណនាតាមរបៀបដូចគ្នានាំឱ្យបានលទ្ធផលប្រូបាប៊ីលីតេដូចក្នុងតារាង១.១។ កត់សម្គាល់ថាផលបូកប្រូបាប៊ីលីតេត្រូវស្មើនិង១។ លទ្ធផលបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាសនៅក្នុងតារាង១.១អាចតាងដោយរូបមន្ត

$$f(x,y)=\frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}$$

ចំពោះ $x=0,1,2; y=0,1,2;$ និង $0\le x+y\le 2$ ។

ខ ប្រូបាប៊ីលីតេដែល (X,Y) ស្ថិតក្នុងដែន A គឺ

$$P\left[(X,Y)\in A\right]=P(X+Y\le 1)=f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)$$

$$=\frac{3}{28}+\frac{3}{14}+\frac{9}{28}=\frac{9}{14}$$

នៅពេលដែល X និង Y គឺជាអថេរចៃដន្យជាប់ នោះអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសមាស(joint density function) $f(x,y)$ គឺជាផ្ទៃដែលលាតសន្ធឹងខាងលើប្លង់ xy ហើយ $P\left[(X,Y)\in A\right]$ ដែល A គឺជាដែន(region)មួយនៃប្លង់ xy គឺស្មើទៅនឹងមាឌស៊ីឡាំងដែលមានបាតម្ខាងជាដែន A និងម្ខាងទៀតជាផ្ទៃនៃអនុគមន៍ពីរអថេរ $f(x,y)$ ។

និយមន័យ១.៩

អនុគមន៍ $f(x,y)$ គឺជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសមាសរបស់អថេរចៃដន្យជាប់ X និង Y បើសិនជា

១) $f(x,y)\ge 0,\forall(x,y)$

២) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdx=1$

៣) $P\left[(X,Y)\in A\right]=\iint_A f(x,y)\,dxdy$

តារាង១.១៖ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាសសម្រាប់ឧទាហរណ៍១.១២

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$f(x,y)$</td><td colspan="3">x</td><td rowspan="2">ផលបូកសរុបនៃជួរដេក</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">y</td><td>0</td><td>$\frac{3}{28}$</td><td>$\frac{9}{28}$</td><td>$\frac{3}{28}$</td><td>$\frac{15}{28}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{3}{14}$</td><td>$\frac{3}{14}$</td><td>0</td><td>$\frac{3}{7}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{1}{28}$</td><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{1}{28}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ផលបូកសរុបនៃជួរឈរ</td><td>$\frac{5}{14}$</td><td>$\frac{15}{28}$</td><td>$\frac{3}{28}$</td><td>1</td></tr>
</table>

ឧទាហរណ៍១.១៣ អាជីវកម្មផ្ទាល់ខ្លួនមួយដំណើរការក្នុងលក្ខណៈ drive-inផងនិងwalk-inផង។ នៅក្នុងថ្ងៃណាមួយដែលគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ តាង X និង Y រៀងគ្នាជាសមាមាត្រនៃចំនួនដងដែលលក្ខណៈ drive-in និងwalk-inត្រូវបានកត់ត្រា។ សន្មតថាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសមាសនៃអថេរចៃដន្យកំណត់ដោយ

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}(2x+3y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

ក ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌនៃនិយមន័យ១.៩។

ខ រក $P[(x,y)\in A]$ដែល $A=\left\{(x,y)\mid 0<x<\frac{1}{2},\frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}\right\}$

ដំណោះស្រាយ

ក អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ $f(x,y)$ នៅលើដែនអាំងតេក្រាល

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2x^2}{5}+\frac{6xy}{5}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{5}+\frac{6y}{5}\right)dy = \left(\frac{2y}{5}+\frac{3y^2}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{5}+\frac{3}{5} = 1$$

ខ គណនា $P\left[(x,y)\in A\right]$

$$P\left[(x,y)\in A\right] = P\left(0<X<\frac{1}{2},\frac{1}{4}<Y<\frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}(2x+3y)\,dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x^2}{5}+\frac{6xy}{5}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} dy$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{10}+\frac{3y}{5}\right)dy = \left(\frac{y}{10}+\frac{3y^2}{10}\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\right)\right] = \frac{13}{160}$$

ដោយមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស $f(x,y)$ នៃអថេរចៃដន្យដាច់ X និង Y នោះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $g(x)$ នៃ X តែមួយបានមកពី

ការបូក $f(x,y)$ នៅលើតម្លៃនានានៃ Y ។ ដូចគ្នាដែរបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $h(y)$ នៃ Y តែមួយបានមកពីការបូក $f(x,y)$ នៅលើតម្លៃនានានៃ X ។ យើងកំណត់ថា $g(x)$ និង $h(y)$ គឺជា *បំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំ* (marginal distribution)នៃ X និង Y រៀងគ្នា។ នៅពេលដែល X និង Y គឺជាអថេរចៃដន្យជាប់នោះផលបូកត្រូវជំនួសដោយអាំងតេក្រាល។ យើងកំណត់និយមន័យជាទូទៅដូចខាងក្រោម

និយមន័យ១.១០

បំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំនៃ X តែមួយនិង Y តែមួយកំណត់រៀងគ្នាដោយៈ

ក)ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យដាច់

$$g(x)=\sum_{y} f(x,y) \text{ និង } h(y)=\sum_{x} f(x,y)$$

ខ)ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យជាប់

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \text{ និង } h(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

ឧទាហរណ៍១.១៤ ចូរបង្ហាញថាផលបូកសរុបនៃជួរដេកនិងជួរឈរក្នុងតារាង១.១ផ្តល់នូវបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំនៃ X តែមួយនិង Y តែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអថេរចៃដន្យ X យើងបាន

$$g(0)=f(0,0)+f(0,1)+f(0,2)=\frac{3}{28}+\frac{3}{14}+\frac{1}{28}=\frac{5}{14}$$

$$g(1)=f(1,0)+f(1,1)+f(1,2)=\frac{9}{28}+\frac{3}{14}+0=\frac{15}{18}$$

$$g(2)=f(2,0)+f(2,1)+f(2,2)=\frac{3}{28}+0+0=\frac{3}{28}$$

តម្លៃទាំងអស់ខាងលើនេះគឺជាផលបូកសរុបនៃជួរឈរនីមួយៗនៃតារាង១.១។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងអាចបង្ហាញថាតម្លៃទាំងឡាយនៃ $h(y)$ កំណត់ដោយផលបូកសរុបនៃជួរដេក។ ក្នុងទម្រង់ជាតារាងបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំនេះអាចសរសេរតាមរបៀបដូចខាងក្រោម

x	0	1	2
$g(x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

y	0	1	2
$h(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

ឧទាហរណ៍១.១៥ ចូររក $g(x)$ និង $h(y)$ នៃអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសមាសក្នុងឧទាហរណ៍១.១៣។

ដំណោះស្រាយ

តាមនិយមន័យខាងលើយើងបាន

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dy$$

$$=\left(\frac{4xy}{5}+\frac{6y^2}{10}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}=\frac{4x+3}{5}$$

ចំពោះ $0\le x\le 1$ ហើយ $g(x)=0$ ចំពោះតម្លៃផ្សេងទៀតនៃ x។ ដូចគ្នាដែរ

$$h(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dx=\frac{2(1+3y)}{5}$$

ចំពោះ $0\le y\le 1$ និង $h(y)=0$ ចំពោះតម្លៃផ្សេងទៀតនៃ y។

និយមន័យ១.១១

តាង X និង Y ជាអថេរចៃដន្យពីរដែលជាអថេរដាច់ឬអថេរជាប់។ បំណែងចែកមានល័ក្ខខ័ណ្ឌនៃអថេរចៃដន្យ Y ដោយមាន $X=x$ គឺ

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}\text{ ចំពោះ } g(x)>0$$

ដូចគ្នានេះដែរ បំណែងចែកមានល័ក្ខខ័ណ្ឌនៃ X ដោយមាន $Y=y$ គឺ

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{h(y)}\text{ ចំពោះ } h(y)>0$$

បើសិនជាយើងចង់រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអថេរចៃដន្យដាច់ X នៅក្នុងចន្លោះ a និង b នៅពេលគេដឹងថាតម្លៃអថេរចៃដន្យដាច់ $Y=y$ នោះយើងត្រូវគណនា

$$P(a<X<b|Y=y)=\sum_{a<x<b} f(x|y)$$

ដែលផលបូកត្រូវពន្លាតចំពោះគ្រប់តម្លៃ X នៅក្នុងចន្លោះ a និង b ។ ក្នុងករណីដែល X និង Y គឺជាអថេរជាប់នោះយើងត្រូវគណនា

$$P(a<X<b|Y=y)=\int_a^b f(x|y)dx\text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍១.១៦ យោងទៅលើឧទាហរណ៍១.១៤ចូររកបំណែងចែកមានល័ក្ខខ័ណ្ឌនៃ X ដោយមាន $Y=1$ រួចប្រើវាដើម្បីកំណត់ $P(X=0|Y=1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងត្រូវរក $f(x|y)$ ដែល $y=1$ ។ ដំបូងយើរក

$$h(1)=\sum_{x=0}^{2}(x,1)=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}+0=\frac{3}{7}$$

ដូច្នេះ

$$f(x|1)=\frac{f(x,1)}{h(1)}=\frac{f(x,1)}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}f(x,1),\ x=0,1,2$$

នោះយើងបាន

$$f(0|1)=\frac{7}{3}f(0,1)=\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f(1|1)=\frac{7}{3}f(1,1)=\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f(2|1)=\frac{7}{3}f(2,1)=\left(\frac{7}{3}\right)(0)=0$$

ដូច្នេះបំណែងចែកមានល័ក្ខខ័ណ្ឌនៃ X ដោយមាន $Y=1$ គឺ

x	0	1	2
$f(x\|1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

ដូច្នេះ $P(X=0|Y=1)=f(0|1)=\dfrac{1}{2}$ ។ វាមានន័យថា បើដឹងថាប៊ិចមួយក្នុងចំណោមពីរដែលត្រូវបានជ្រើសរើសគឺជាប៊ិចក្រហម($Y=1$) នោះប្រូបាប៊ីលីតេដែលប៊ិចគេជ្រើសរើសផ្សេងទៀតមិនមែនពណ៌ខៀវ($X=0$)ស្មើទៅនឹង $\dfrac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍១.១៧ ដង់ស៊ីតេសមាសនៃអថេរចៃដន្យ (X,Y) ដែល X គឺជាចំនួនឯកតានៃបម្រែបម្រួលសីតុណ្ហភាពនិង Y គឺជាសមាមាត្រនៃដែនបម្លាស់ទីរបស់ភាគល្អិតអាតូមមួយកំណត់ដោយ

$$f(x,y)=\begin{cases}10xy^2, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

ក) រកអនុគន៍ដង់ស៊ីតេបន្ទាប់បន្សំ(marginal density) $g(x)$ $h(y)$ និងដង់ស៊ីតេមានលក្ខខណ្ឌ $f(y|x)$ ។

ខ) រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលដែនបម្លាស់ទី ច្រើនជាងពាក់កណ្ដាលនៃ 'observations' សរុបដោយដឹងថាសីតុណ្ហភាពកើនឡើងបាន 0.25 ឯកតា។

ដំណោះស្រាយ

ក)តាមនិយមន័យយើងបាន

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{x}^{1}10xy^2dy=\frac{10}{3}xy^3\Big|_{y=x}^{y=1}$$

$$=\frac{10}{3}x\left(1-x^3\right);0<x<1$$

$$h(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{0}^{y}10xy^2dx=5x^2y^2\Big|_{x=0}^{x=y}=5y^4;0<y<1$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x\left(1-x^3\right)}=\frac{3y^2}{1-x^3},0<x<1,0<y<1$$

ខ)

$$P\left(Y>\frac{1}{2}\,|\,X=0.25\right)=\int_{1/2}^{1} f(y\,|\,x=0.25)dy$$

$$=\int_{1/2}^{1}\frac{3y^2}{1-0.25^3}dy=\frac{8}{9}$$

ឧទាហរណ៍១.១៨ គេមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសមាស

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\left(1+3y^2\right)}{4},0<x<2,0<y<1\\ 0,\text{elsewhere}\end{cases}$$

ចូររក $g(x),h(y),f(x\,|\,y)$ និងគណនា $P\left(\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}\,|\,Y=\frac{1}{3}\right)$

។

ដំណោះស្រាយ

តាមនិយមន័យដង់ស៊ីតេបន្ទាប់បន្សំ(marginal density)ចំពោះ $0 < x < 2$ យើងបាន

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{x\left(1+3y^2\right)}{4}dy = \left(\frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{x}{2}$$

ហើយចំពោះ $0 < y < 1$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{x\left(1+3y^2\right)}{4}dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{1+3y^2}{2}$$

ដូច្នេះ ដោយប្រើនិយមន័យដង់ស៊ីតេមានលក្ខខណ្ឌ ចំពោះ $0 < x < 2$

$$f(x\,|\,y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{x\left(1+3y^2\right)/4}{\left(1+3y^2\right)/2} = \frac{x}{2}$$

បើសិនជា $f(x\,|\,y)$ មិនអាស្រ័យលើ y ដូចក្នុងករណីឧទាហរណ៍ ១.២០ នោះ $f(x\,|\,y) = g(x)$ ហើយ $f(x,y) = g(x)h(y)$ សម្រាយបញ្ជាក់អាចធ្វើឡើងតាមរយៈការជំនួស

$$f(x,y) = f(x\,|\,y)h(y)$$

ទៅក្នុងបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំនៃ X ។ ពោលគឺ

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x\,|\,y)h(y)\,dy$$

បើ $f(x\,|\,y)$ មិនអាស្រ័យលើ y នោះយើងសរសេរ

$$g(x) = f(x|y)\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,dy$$

យើងបាន

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,dy = 1$$

ព្រោះ $h(y)$ គឺជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេនៃ Y ។ ដូច្នេះ

$$g(x) = f(x|y)$$

ហើយយើងទាញបាន

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

ដូច្នេះបើសិនជា $f(x|y)$ មិនអាស្រ័យលើ y នោះលទ្ធផលនៃអថេរចៃដន្យ Y គ្មានឥទ្ធិពលលើលទ្ធផលនៃអថេរចៃដន្យ X ទេ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងនិយាយថា X និង Y គឺជាអថេរចៃដន្យឯករាជ្យ។

និយមន័យ១.១២

តាង X និង Y ជាអថេរចៃដន្យពីរ អថេរចៃដន្យដាច់ឬជាប់ ដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស $f(x,y)$ និងបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំ $g(x)$ និង $h(y)$ រៀងគ្នា។ អថេរចៃដន្យ X និង Y ហៅថាឯករាជ្យលុះត្រាតែ

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

ចំពោះគ្រប់ (x,y) ស្ថិតនៅក្នុងដែនកំណត់របស់វា។ អថេរចៃដន្យនៅក្នុងឧទាហរណ៍១.១៨ មានភាពឯករាជ្យបែបស្ថិតិដោយសាផលគុណនៃបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំ(marginal distribution) ទាំងពីរស្មើទៅនឹងអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសមាស។ ការពិនិត្យមើលភាពឯករាជ្យនៃអថេរចៃដន្យជាប់ទាមទារនូវការអង្កេតល្អិតល្អន់ដោយសារវាអាចមានករណីមួយចំនួនដែលផលគុណបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេបន្ទាប់បន្សំ(marginal distribution) ស្មើនិងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាសមួយ ប៉ុន្តែមិនមែនគ្រប់បន្សំនៃគូ (x,y) នោះទេ។ បើសិនជាគេ

អាចរកបានចំណុច(x, y)ណាមួយដែល $f(x, y)$ កំណត់ក្នុងរបៀបដែល $f(x, y) \neq g(x)h(y)$ នោះអថេរចៃដន្យដាច់ X និង Y មិនឯករាជ្យបែបស្ថិតិទេ។

ឧទាហរណ៍១.១៩ ចូរបង្ហាញថាអថេរចៃដន្យនៅក្នុងឧទាហរណ៍១.១៤ មិនឯករាជ្យបែបស្ថិតិ

សម្រាយបញ្ជាក់

ពិនិត្យមើលនៅត្រង់ចំណុច$(0,1)$។ ពីតារាង១.១ យើងរកបានប្រូបាប៊ីលីតេ $f(0,1), g(0)$ និង $h(1)$ ដូចខាងក្រោម។

$$f(0,1) = \frac{3}{14}$$

$$g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0, y) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$$

$$h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$$

យើងឃើញថា $f(0,1) \neq g(0)h(1)$ ដូច្នេះ X និង Y មិនឯករាជ្យបែបស្ថិតិ។

ជំពូក២

សង្ឃឹមគណិត

នៅក្នុងជីវភាពរស់នៅ គ្រប់គ្នាតែងតែឮអំពីល្បែងឆ្នោត ឬអំពីវិស័យធានារ៉ាប់រងជាដើម។ នៅក្នុងល្បែងឆ្នោត ឱកាសដែលអ្នកលេងចាក់ត្រូវមានតិចតួច ប៉ុន្តែប្រាក់រង្វាន់ធំបើធៀបនឹងប្រាក់ដើមដែលយកទៅចាក់។ កាលណាប្រាក់រង្វាន់កាន់តែធំ ឱកាសចាក់ត្រូវកាន់តែតូច។ ហេតុអ្វីក៏មេឆ្នោតនៅតែទទួលបានចំណេញ? នៅក្នុងវិស័យធានារ៉ាប់រងវិញ អ្នកទិញធានារ៉ាប់រងទទួលបានសំណងខូចខាតខ្ពស់បើធៀបនឹងទឹកប្រាក់ដែលបង់ទៅឱ្យក្រុមហ៊ុន។ ហេតុអ្វីក្រុមហ៊ុននៅតែអាចរកប្រាក់ចំណេញបាន? ចម្លល់ទាំងនេះនឹងអាចពន្យល់បានតាមរយៈការសិក្សាអំពីសង្ឃឹមគណិត។

២.១ មធ្យមនៃអថេរចៃដន្យ (Mean of a Random Variable)

និយមន័យ២.១

ពិនិត្យមើលឧទាហរណ៍ខាងក្រោម។ បើគេបោះកាក់ពីរ ចំនួនដប់ដង ហើយតាង X ជាចំនួនដងនៃការចេញផ្ការ(H)ក្នុងការបោះម្តងៗ នោះតម្លៃ X អាចស្មើនឹង0, 1និង 2។ ឧបមាថានៅក្នុងពិសោធន៍នេះលទ្ធផលដែលគ្មានផ្ការ ផ្ការមួយ និងផ្ការពីរគឺមាន ៤ដង ៧ដង និង៥ដងរៀងគ្នា នោះចំនួនមធ្យមនៃលទ្ធផលផ្ការ(H)ក្នុងការបោះកាក់ពីរម្តងៗគឺ

$$\frac{(0)(4)+(1)(7)+(2)(5)}{16}=1.06$$

នេះគឺជាតម្លៃមធ្យម(average value)របស់ទិន្នន័យ ប៉ុន្តែវាមិនអាចជាតម្លៃណាមួយនៃ $\{0,1,2\}$ ។ យើងអាចរៀបចំសរសេរនូវរបៀបគណនាដូចខាងក្រោម

$$(0)\left(\frac{4}{16}\right)+(1)\left(\frac{7}{16}\right)+(2)\left(\frac{5}{16}\right)=1.06$$

ចំនួន $4/16, 7/16$ និង $5/16$ គឺជាប្រភាគនៃចំនួនដងនៃការបោះកាក់សរុប ដែលអាចបានលទ្ធផលផ្ការ 0, 1, ឬ2 ដងរៀងគ្នា។ ប្រភាគនេះក៏ជាប្រេក្វង់ធៀបនៃតម្លៃនីមួយៗរបស់ x ផងដែរ។ វិធីប្រេកង់ធៀបនេះត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីគណនាតម្លៃកណ្តាល(average) នៃចំនួនលទ្ធផលផ្ការក្នុងការបោះកាក់ពីរម្តងៗដែលយើងរំពឹងទុកក្នុងរយៈពេលយូរ។ យើងហៅតម្លៃកណ្តាល(average) នេះថាជាមធ្យម(mean)នៃបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេរបស់ X ហើយគេតាងវាដោយ μ_X ឬ μ ។ ជាធម្មតាស្ថិតិវិទូខ្លះហៅមធ្យម(mean)នេះជាសង្ឃឹមគណិត (mathematical expectation) ឬតម្លៃសង្ឃឹមទុក(expected value) របស់អថេរចៃដន្យ X ហើយកំណត់សរសេរដោយ $E(X)$។

ឧបមាថាកាក់មួយត្រូវបោះពីរដង។ លំហគំរូតាងនៃពិសោធន៍គឺ

$$S=\{HH, HT, TH, TT\}$$

យើងបាន

$$P(X=0)=P(TT)=\frac{1}{4}, P(X=1)=P(TH)+P(HT)=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=P(HH)=\frac{1}{4}$$

ដូច្នេះ

$$\mu=E(X)=(0)\left(\frac{1}{4}\right)+(1)\left(\frac{1}{2}\right)+(2)\left(\frac{1}{4}\right)=1$$

និយមន័យ ២.២

តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $f(x)$ ។ មធ្យម(mean)ឬតម្លៃសង្ឃឹមទុក(expected value)របស់ X គឺ

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$$

បើសិនជា X ជាអថេរដាច់ ហើយ

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

បើសិន X ជាអថេរជាប់។

ឧទាហរណ៍២.១ អង្គប្រកប(component)មួយឡូត៍ដែលមានចំនួន៧ត្រូវបានធ្វើគំរូតាងដោយអ្នកត្រួតពិនិត្យគុណភាពម្នាក់។ ក្នុងនោះ មានអង្គប្រកបចំនួន៤ល្អ និង៣ទៀតខូច។ គំរូតាងមួយដែលមានអង្គប្រកបចំនួន៣ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយអ្នកត្រួតពិនិត្យគុណភាព។ ចូររកតម្លៃរំពឹងទុកនៃចំនួនអង្គប្រកបដែលល្អនៅក្នុងគំរូតាង។

ដំណោះស្រាយ

តាង X ជាចំនួនអង្គប្រកបដែលល្អ នៅក្នុងគំរូតាង។ នោះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X គឺ

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}; x = 0, 1, 2, 3$$

តាមការគណនាយើងបាន

$$f(0) = \frac{1}{35}, \ f(1) = \frac{12}{35}, \ f(2) = \frac{18}{35}, \ f(3) = \frac{4}{35}$$

ដូច្នេះ

$$\mu = E(X) = (0)\left(\frac{1}{35}\right) + (1)\left(\frac{12}{35}\right) + (2)\left(\frac{18}{35}\right) + (3)\left(\frac{4}{35}\right) = 1.7$$

ដូច្នេះ បើគំរូតាងដែលមានទំហំបីត្រូវបានជ្រើសរើសម្តងហើយម្តងទៀតចេញពីអង្គប្រកបមួយដែលមានអង្គប្រកប៤ល្អនិង៣ខូចនោះ គេទទួលបានជាមធ្យមអង្គប្រកបល្អចំនួន1.7។

ឧទាហរណ៍២.៣ អ្នកលក់ម្នាក់របស់ក្រុមហ៊ុនលក់សម្ភារៈពេទ្យមានការណាត់ជួបចំនួនពីរនៅថ្ងៃតែមួយ។ នៅក្នុងការណាត់ជួបលើកទីមួយគាត់ជឿថាគាត់មានឱកាស៧០%នៅក្នុងការព្រមព្រៀងគ្នាដែលនឹងនាំឱ្យគាត់អាចរកកម្រៃជើងសារ១០០០ដុល្លា បើសិនជាបានជោគជ័យ។ ម្យ៉ាងវិញទៀតគាត់គិតថាគាត់មានឱកាសតែ៤០%ទេក្នុងការព្រមព្រៀងនៅក្នុងការណាត់ជួបទីពីរ ដែលនឹងអាចឱ្យគាត់រកបាន១៥០០ដុល្លា។ រកប្រាក់កម្រៃជើងសារដែលគាត់រំពឹងទុកដោយផ្អែកទៅលើជំនឿតាមប្រូបាប៊ីលីតេផ្ទាល់ខ្លួនរបស់គាត់។ សន្មតថាលទ្ធផលណាត់ជួបទាំងពីរមិនទាក់ទងគ្នា។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះការណាត់ជួបទាំងពីរ អ្នកលក់អាចទទួលបានកម្រៃជើងសារបួនរបៀប៖ \$0, \$1000, \$1500, និង\$2500។ យើងនឹងគណនាប្រូបាប៊ីលីតេដែលត្រូវគ្នានឹងកម្រៃជើងសារទាំងនេះ។ តាមរយៈភាពឯករាជក្នុងន័យស្ថិតិ យើងបាន

$$f(\$0)=(1-0.7)(1-0.4)=0.18,\ f(\$1000)=(0.7)(1-0.4)=0.42$$
$$f(\$2500)=(0.7)(0.4)=0.28,\ f(\$1500)=(1-0.7)(0.4)=0.12$$

ដូច្នេះតម្លៃសង្ឃឹមទុកនៃកម្រៃជើងសារគឺ

$$\begin{aligned}E(X)&=(0)(0.18)+(1000)(0.42)+(1500)(0.12)+(2500)(0.28)\\&=\$1300\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍២.៤ តាង X ជាអថេរចៃដន្យតំណាងឱ្យអាយុកាលប្រើប្រាស់នៃឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិចមួយប្រភេទ(គិតជាម៉ោង)។ អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេកំណត់ដោយ

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{20000}{x^3}, x>100\\ 0, \text{elsewhere}\end{cases}$$

រកអាយុកាលរំពឹងទុកនៃឧបករណ៍ប្រើប្រាស់នោះ។

ដំណោះស្រាយ

$$\mu=E\left(X\right)=\int_{100}^{+\infty}x\frac{20000}{x^3}dx=\int_{100}^{+\infty}\frac{20000}{x^2}dx=200$$

ដូច្នេះយើងអាចរំពឹងទុកថាឧបករណ៍នេះអាចមានអាយុកាលប្រើប្រាស់ជាមធ្យមចំនួន200ម៉ោង។

ជាបន្តទៅទៀតយើងពិនិត្យមើលអថេរចៃដន្យថ្មី $g\left(X\right)$ ដែលអាស្រ័យលើ X មានន័យថាតម្លៃនីមួយៗនៃ $g\left(X\right)$ ត្រូវកំណត់ដោយតម្លៃ X ។ ជាឧទាហរណ៍ $g\left(X\right)$អាចជា X^2 ឬ $2X-1$ជាដើម។ ដូច្នេះ ពេល X មានតម្លៃស្មើ2នោះ $g\left(X\right)$មានតម្លៃស្មើនឹង $g\left(2\right)$។

បើសិនជា X ជាអថេរចៃដន្យដាច់ដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $f\left(x\right)$ចំពោះ $x=-1,0,1,2$ ហើយ $g\left(X\right)=X^2$ នោះ

$$P\left[g\left(X\right)=0\right]=P\left(X=0\right)=f\left(0\right)$$

$$P\left[g\left(X\right)=1\right]=P\left(X=-1\right)+P\left(X=1\right)=f\left(-1\right)+f\left(1\right)$$

$$P\left[g\left(X\right)=4\right]=P\left(X=2\right)=f\left(2\right)$$

ដូច្នេះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ $g\left(X\right)$កំណត់ដោយ

$g(x)$	0	1	4
$P\left[g(X)=g(x)\right]$	$f(0)$	$f(-1)+f(1)$	$f(2)$

តាមនិយមន័យតម្លៃរំពឹងទុកនៃអថេរចៃដន្យ យើងបាន

$$\begin{aligned}\mu_{g(X)} &= E\left[g(X)\right] = 0f(0)+1\left[f(-1)+f(1)\right]+4f(2)\\ &=(-1)^2 f(-1)+(0)^2 f(0)+(1)^2 f(1)+(2)^2 f(2)\\ &=\sum_x g(x)f(x)\end{aligned}$$

តាមរយៈលទ្ធផលនេះ យើងអាចថ្លែងនូវភាពទូទៅមួយទាំងក្នុងករណីអថេរចៃដន្យដាច់និងអថេរចៃដន្យជាប់។

ទ្រឹស្តីបទ២.១

តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $f(x)$ ។ តម្លៃរំពឹងទុក(expected value)របស់អថេរចៃដន្យ $g(X)$ គឺ

$$\mu_{g(X)} = E\left[g(X)\right] = \sum_x g(x)f(x)$$

បើសិនជា X ជាអថេរចៃដន្យដាច់ ហើយ

$$\mu_{g(X)} = E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

បើសិនជា X ជាអថេរជាប់។

ឧទាហរណ៍២.៥ តាង X ជាចំនួនរថយន្តដែលចូលលាងនៅកន្លែងបម្រើសេវាកម្មលេងរថយន្តមួយនៅចន្លោះម៉ោង៤ទៅម៉ោង៥ល្ងាចនៅថ្ងៃសុក្រ។ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X កំណត់ដោយ

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

តាង $g(X)=2X-1$ ជាចំនួនទឹកប្រាក់(គិតជាដុល្លា)ដែលអ្នកគ្រប់គ្រងផ្ដល់ទៅឲ្យអ្នកចាំកន្លែង។ រកប្រាក់កម្រៃរំពឹងទុករបស់អ្នកចាំកន្លែងលើកំឡុងពេលជាក់លាក់ណាមួយ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្ដីបទ២.១ ម្ចាស់អាជីវកម្មលាងរថយន្តអាចរំពឹងទុកថារកបាន

$$E\left[g(X)\right]=E(2X-1)=\sum_{x=4}^{9}(2x-1)f(x)$$

$$=7\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{12}+11\times\frac{1}{4}+13\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{6}+17\times\frac{1}{6}=\$12.67$$

ឧទាហរណ៍ ២.៦ តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{3},-1<x<2\\ 0,\text{else}\end{cases}$$

រកតម្លៃរំពឹងទុកនៃ $g(X)=4X+3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្ដីបទ២.១ យើងបាន

$$E(4X+3)=\int_{-1}^{2}\frac{(4x+3)x^2}{3}dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left(4x^3+3x^2\right)dx=8$$

និយមន័យ ២.៣

តាង X និង Y ជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស $f(x,y)$។ មធ្យម(mean)ឬតម្លៃរំពឹងទុក(expected value) របស់អថេរចៃដន្យ $g(x,y)$ គឺ

$$\mu_{g(X,Y)} = E\left[g(X,Y)\right] = \sum_x \sum_y g(x,y)\, f(x,y)$$

បើសិនជា X និង Y ជាអថេរចៃដន្យដាច់ ហើយ

$$\mu_{g(X,Y)} = E\left[g(X,Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\,dxdy$$

បើ X និង Y ជាអថេរចៃដន្យជាប់។

ឧទាហរណ៍ ២.៧ តាង X និង Y ជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដូចក្នុងតារាង២.១។ រកតម្លៃរំពឹងទុកនៃ $g(X,Y) = XY$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមនិយមន័យ២.៣ យើងអាចសរសេរ

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y) \\ &= (0)(0)\, f(0,0) + (0)(1)\, f(0,1) + (0)(2)\, f(0,2) \\ &\quad + (1)(0)\, f(1,0) + (1)(1)\, f(1,1) + (1)(2)\, f(1,2) \\ &\quad + (2)(0)\, f(2,0) + (2)(1)\, f(2,1) + (2)(2)\, f(2,2) \\ &= f(1,1) = 3/14 \end{aligned}$$

តារាង២.១៖ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$f(x,y)$</td><td colspan="3">x</td><td rowspan="2">ផលបូកសរុបនៃជួរដេក</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">y</td><td>0</td><td>$\frac{3}{28}$</td><td>$\frac{9}{28}$</td><td>$\frac{3}{28}$</td><td>$\frac{15}{28}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{3}{14}$</td><td>$\frac{3}{14}$</td><td>0</td><td>$\frac{3}{7}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{1}{28}$</td><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{1}{28}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ផលបូកសរុបនៃជួរឈរ</td><td>$\frac{5}{14}$</td><td>$\frac{15}{28}$</td><td>$\frac{3}{28}$</td><td>1</td></tr>
</table>

ឧទាហរណ៍ ២.៨ រក $E(Y/X)$ របស់អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\left(1+3y^2\right)}{4}, 0<x<2, 0<y<1\\ 0, \text{elsewhere}\end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=\int_0^1\int_0^2 \frac{y}{x}\frac{x\left(1+3y^2\right)}{4}dxdy=\int_0^1\int_0^2 \frac{y\left(1+3y^2\right)}{4}dxdy$$

$$=\int_0^1 \frac{y+3y^3}{2}dy=\frac{5}{8}$$

កត់សម្គាល់ថាបើ $g(X,Y)=X$ នៅក្នុងនិយមន័យ២.៣ នោះយើងបាន

ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យដាច់

$$E(X)=\sum_{x}\sum_{y}xf(x,y)=\sum_{x}xg(x)$$

ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យជាប់

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dydx=\int_{-\infty}^{+\infty}xg(x)\,dx$$

ដែល $g(x)$ ជាបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំ(marginal distribution)នៃ X ។ ដូច្នេះ នៅក្នុងការគណនា $E(X)$ នៅក្នុងលំហវិមាត្រពីរ គេអាចប្រើបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាសនៃ X និង Y ឬមួយប្រើបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំនៃ X ។ ដូចគ្នាដែរ យើងកំណត់៖

ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យដាច់

$$E(Y)=\sum_{y}\sum_{x}yf(x,y)=\sum_{y}yh(y)$$

ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យជាប់

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}yh(y)\,dy$$

ដែល $h(y)$ គឺជាបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំរបស់អថេរចៃដន្យ Y ។

២.២ វ៉ារ្យ៉ង់ និងកូវ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យ (Variance and Covariance of Random Variables)

មធ្យម(mean)និងតម្លៃរំពឹងទុក(expected value)របស់អថេរចៃដន្យ X មានសារសំខាន់នៅក្នុងស្ថិតិវិទ្យាព្រោះថាវាពិពណ៌នាអំពីទីតាំងចំណុចកណ្តាលរបស់បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ វាពុំបានបង្ហាញល្អិតល្អន់នូវទ្រង់ទ្រាយនៃបំណែងចែកទេ។ យើងត្រូវការកំណត់លក្ខណៈនៃបម្រែបម្រួលនៅក្នុងបំណែងចែក។

រង្វាស់នៃបម្រែបម្រួល(measure of variability)ដែលសំខាន់បំផុតរបស់អថេរចៃដន្យ X បានមកពីការប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទ២.១ដោយមាន

$g(X)=(X-\mu)^2$ ។ បរិមាណនេះ គេហៅថាវ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យ (variance of the random variable) X ឬវ៉ារ្យ៉ង់នៃបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេរបស់ X ។ គេតាងដោយ $Var(X)$ ឬដោយនិម្មិតសញ្ញា σ_X^2 ឬត្រឹមតែ σ^2 បើសិនជាគេស្គាល់ច្បាស់នូវអថេរ។

និយមន័យ ២.៤

តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $f(x)$ និងមធ្យម μ ។ វ៉ារ្យ៉ង់របស់ X គឺ

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

បើសិនជា X ជាអថេរចៃដន្យដាច់ និង

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

បើសិនជា X ជាអថេរចៃដន្យជាប់។ ឫសការេវិជ្ជមាននៃវ៉ារ្យ៉ង់ហៅថាគម្លាតស្តង់ដារបស់របស់ X ។

ឧទាហរណ៍ ២.៩ អថេរចៃដន្យ X តាងឱ្យចំនួនរថយន្តដែលត្រូវបានប្រើក្នុងគោលបំណងធុរកិច្ចជាផ្លូវការនៅថ្ងៃធ្វើការណាមួយ។ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសម្រាប់ក្រុមហ៊ុនAគឺ

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.5

ចំពោះក្រុមហ៊ុន B គឺ

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

គណនាវ៉ារ្យ៉ង់នៃបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសម្រាប់ក្រុមហ៊ុននីមួយៗ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះក្រុមហ៊ុនA

$$\mu_A = E\left(X\right) = 1\times 0.3 + 2\times 0.4 + 3\times 0.3 = 2.0$$

$$\sigma_A^2 = \sum_{x=1}^{3}\left(x-\mu_A\right)^2 f\left(x\right)$$

$$= \left(1-2\right)^2 \times 0.3 + \left(2-2\right)^2 \times 0.4 + \left(3-2\right)^2 \times 0.3 = 0.6$$

ចំពោះក្រុមហ៊ុនB

$$\mu_B = 0\times 0.2 + 1\times 0.1 + 2\times 0.3 + 3\times 0.3 + 4\times 0.1 = 2.0$$

$$\sigma_B^2 = \sum_{x=0}^{4}\left(x-\mu_B\right)^2 f\left(x\right)$$

$$= \left(0-2\right)^2 \times 0.2 + \left(1-2\right)^2 \times 0.1 + \left(2-2\right)^2 \times 0.3$$

$$+ \left(3-2\right)^2 \times 0.3 + \left(4-2\right)^2 \times 0.1$$

$$= 1.6$$

ទ្រឹស្តីបទ ២.២

វ៉ារ្យង់របស់អថេរចៃដន្យ X គឺ

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \mu^2$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យដាច់ យើងអាចសរសេរ

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x \left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right) f(x)$$
$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x)$$
$$= E\left(X^2\right) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1$$
$$= E\left(X^2\right) - \mu^2$$

ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យជាប់ យើងបាន

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$
$$= E\left(X^2\right) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1$$
$$= E\left(X^2\right) - \mu^2$$

ឧទាហរណ៍ ២.១០ អថេរចៃដន្យ X តាងឱ្យចំនួនគ្រឿងបំណែកដែលខូចរបស់ម៉ាស៊ីនមួយ នៅពេលដែលគ្រឿងបំណែកចំនួនបីត្រូវបានយកជាគំរូតាងចេញពីខ្សែសង្វាក់ផលិត កម្មមួយ។ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X គឺ

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

គណនាវ៉ារ្យ៉ង់នៃបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេរបស់ X ។

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងគណនា

$$\mu = 0 \times 0.51 + 1 \times 0.38 + 2 \times 0.10 + 3 \times 0.01 = 0.61$$
$$E\left(X^2\right) = 0^2 \times 0.51 + 1^2 \times 0.38 + 2^2 \times 0.10 + 3^2 \times 0.01 = 0.87$$

ដូច្នេះ

$$\sigma^2 = 0.87 - 0.61^2 = 0.4979$$

ឧទាហរណ៍ ២.១១ តម្រូវការប្រចាំសប្តាហ៍នៃផលិតផលទឹកពិសារ(គិតជាពាន់លីត្រ)ចេញពីក្រុមហ៊ុនមួយគឺជាអថេរចៃដន្យជាប់ដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេដូចខាងក្រោម។ រកមធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់របស់ X ។

$$f(x)=\begin{cases}2(x-1), & 1<x<2\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

$$\mu=E(X)=2\int_1^2 x(x-1)\,dx=\frac{5}{3}$$

$$E(X^2)=2\int_1^2 x^2(x-1)\,dx=\frac{17}{6}$$

ដូច្នេះ

$$\sigma^2=\frac{17}{16}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

នៅត្រង់ចំណុចនេះ វ៉ារ្យ៉ង់ឬគម្លាតស្តង់ដា មានន័យតែនៅពេលយើងប្រៀបធៀបបំណែងចែកដែលមានខ្នាតរង្វាស់ដូចគ្នា។ វានឹងមិនមានន័យអ្វីទេក្នុងការប្រៀបធៀបវ៉ារ្យ៉ង់នៃបំណែងចែកអថេរដែលខ្នាតរង្វាស់ខុសគ្នាដូចជាកម្ពស់ជាមួយនិងពិន្ទុជាដើម។

យើងនឹងពង្រីកគំនឹតទាក់ទងនឹងអថេរចៃដន្យតទៅទៀត។

ទ្រឹស្តីបទ ២.៣

តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $f(x)$។ វ៉ារ្យ៉ងរបស់អថេរចៃដន្យ $g(X)$ គឺ

$$\sigma_{g(X)}^2=E\left\{\left[g(X)-\mu_{g(X)}\right]^2\right\}=\sum_x\left[g(x)-\mu_{g(X)}\right]^2 f(x)$$

បើសិនជា X ជាអថេរដាច់ និង

$$\sigma_{g(X)}^2 = E\left\{\left[g(X)-\mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[g(x)-\mu_{g(X)}\right]^2 f(x)\,dx$$

ឧទាហរណ៍ ២.១២ គណនាវ៉ារ្យ៉ង់របស់ $g(X)=2X+3$ ដែល X ដែលជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

x	0	1	2	3
$f(x)$	¼	1/8	½	1/8

ដំណោះស្រាយ

$$\mu_{2X+3} = E(2X+3) = \sum_{x=0}^{3}(2x+3)f(x)$$
$$=(2\cdot 0+3)\frac{1}{4}+(2\cdot 1+3)\frac{1}{8}+(2\cdot 2+3)\frac{1}{2}+(2\cdot 3+3)\frac{1}{8}$$
$$=6$$

$$\sigma_{2X+3}^2 = E\left\{\left[(2X+3)-\mu_{2X+3}\right]^2\right\} = E\left[(2X+3-6)^2\right]$$
$$=E\left(4X^2-12X+9\right)=\sum_{x=0}^{3}\left(4x^2-12x+9\right)f(x)$$
$$=\left(4\cdot 0^2-12\cdot 0+9\right)\frac{1}{4}+\cdots+\left(4\cdot 3^2-12\cdot 3+9\right)\frac{1}{8}$$
$$=4$$

ឧទាហរណ៍ ២.១៣ តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}, & -1<x<2\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

រកវ៉ារ្យ៉ង់នៃអថេរចៃដន្យ $g(X)=4X+3$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\mu_{4X+3}=E(4X+3)=\int_{-1}^{2}(4x+3)\frac{x^2}{3}dx=8$$

$$\sigma_{4X+3}^2=E\left\{\left[(4X+3)-8\right]^2\right\}=E\left[(4X-5)^2\right]$$

$$=\int_{-1}^{2}(4x-5)^2\frac{x^2}{3}dx=\frac{51}{5}$$

បើ $g(X,Y)=(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ ដែល $\mu_X=E(X)$ និង $\mu_Y=E(Y)$ នោះនិយមន័យ២.២ផ្តល់នូវតម្លៃរំពឹងទុកដែលគេហៅថា *កូវ៉ារ្យ៉ង់* នៃ X និង Y ។ គេតាងវាដោយ σ_{XY} ឬ $Cov(X,Y)$ ។

និយមន័យ ២.៤

តាង X និង Y ជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាបប៊ីលីតេសមាស $f(x,y)$ ។ កូវ៉ារ្យង់នៃ X និង Y គឺ

$$\sigma_{XY}=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$=\sum_x\sum_y(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)$$

បើសិនជា X និង Y ជាអថេរចៃដន្យដាច់ ហើយ

$$\sigma_{XY}=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_y)f(x,y)dxdy$$

បើសិនជា X និង Y ជាអថេរចៃដន្យជាប់។

កូវ៉ារ្យ៉ង់នៃអថេរចៃដន្យពីរគឺជារង្វាស់នៃសភាពរបស់ទំនាក់ទំនងរវាងអថេរទាំងពីរនោះ។ បើតម្លៃធំរបស់ X តែងតែផ្តល់នូវតម្លៃ Y ធំដែរ ឬតម្លៃតូចនៃ X នាំឱ្យបាននូវតម្លៃ Y តូចដែរ នោះតម្លៃវិជ្ជមាន $X-\mu_X$ នឹងនាំឱ្យបានតម្លៃវិជ្ជមាន $Y-\mu_Y$ ហើយតម្លៃអវិជ្ជមាន $X-\mu_X$ នាំឱ្យបានតម្លៃអវិជ្ជមាន $Y-\mu_Y$

។ ដូច្នេះផលគុណ $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ តែងតែវិជ្ជមានជានិច្ច។ម្យ៉ាងវិញទៀត បើតម្លៃធំរបស់ X តែងនាំឱ្យមានតម្លៃ Y តូចនោះផលគុណខាងលើ អវិជ្ជមាន។ សញ្ញារបស់កូវ៉ារ្យ៉ង់បង្ហាញថាតើទំនាក់ទំនងរវាងអថេរពីរដែលមិនឯករាជពីគ្នា វិជ្ជមានឬអវិជ្ជមាន។ នៅពេលដែល X និង Y ឯករាជក្នុងន័យស្ថិតិ (statically independent) វាបង្ហាញថាកូវ៉ារ្យ៉ង់ស្មើសូន្យ។ ភាពច្រាសមកវិញមិនពិតជាទូទៅទេ។ អថេរពីរអាចមានកូវ៉ារ្យ៉ង់ស្មើសូន្យ ក៏ប៉ុន្តែមិនឯករាជក្នុងន័យស្ថិតិដែរ។ កត់សម្គាល់ថា កូវ៉ារ្យ៉ង់គ្រាន់តែពិពណ៌នានូវទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែររវាងអថេរចៃដន្យពីរតែប៉ុណ្ណោះ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ បើសិនជាកូវ៉ារ្យ៉ង់រវាង X និង Y ស្មើសូន្យ នោះ X និង Y ក៏អាចមានទំនាក់ទំនងមិនលីនេអ៊ែរមួយដែរ មានន័យថាពួកវាមិនចាំបាច់តែជាអថេរឯករាជនោះទេ។

ទ្រឹស្តីបទ ២.៤

កូវ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យពីរ X និង Y ដែលមានមធ្យម μ_X និង μ_Y រៀងគ្នា គឺ

$$\sigma_{XY}=E(XY)-\mu_X\mu_Y$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ក្នុងករណីអថេរដាច់ យើងអាចសរសេរ

$$\begin{aligned}\sigma_{XY}&=\sum_x\sum_y(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)\\&=\sum_x\sum_y xyf(x,y)-\mu_X\sum_x\sum_y yf(x,y)\\&\quad-\mu_Y\sum_x\sum_y xf(x,y)+\mu_X\mu_Y\sum_x\sum_y f(x,y)\end{aligned}$$

ដោយ $\mu_X=\sum_x xf(x)$ $\mu_Y=\sum_y yf(x,y)$ និង $\sum_x\sum_y f(x,y)=1$ នោះ

យើងបាន

$$\sigma_{XY} = \sum_{x}\sum_{y} xyf(x,y) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

ចំពោះអថេរដាច់ សម្រាយបញ្ជាក់អាចធ្វើតាមលំនាំដូចគ្នា។

ឧទាហរណ៍២.១៤ អថេរចៃដន្យ X និង Y មានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាសដូចតារាង២.១។ រកកូវ៉ារ្យ៉ង់នៃ X និង Y ។

ដំណោះស្រាយ

តាមឧទាហរណ៍២.៧ យើងបាន

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y) = \frac{3}{14}$$

$$\mu_X = \sum_{x=0}^{2} xg(x) = 0\times\frac{5}{14} + 1\times\frac{15}{28} + 2\times\frac{3}{28} = \frac{3}{4}$$

ដូច្នេះ

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \frac{3}{14} - \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = -\frac{9}{56}$$

ឧទាហរណ៍២.១៥ ចំនួន X មួយផ្នែកនៃអត្តពលិកបុរសនិងចំនួន Y មួយផ្នែកនៃអត្តពលិកនារីដែលបានប្រកួតក្នុងការរត់ប្រណាំងម៉ារ៉ាតុងត្រូវបានកំណត់ដោយអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសមាស

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

ចូររកកូវ៉ារ្យ៉ង់នៃ X និង Y ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេបន្ទាប់បន្សំនៃ X គឺ

$$g(x)=\int_0^x 8xydx=4x^3$$

ដូច្នេះ

$$g(x)=\begin{cases}4x^3, 0\le x\le 1\\ 0, \text{elsewhere}\end{cases}$$

អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេបន្ទាប់បន្សំនៃ Y គឺ

$$h(y)=\int_y^1 8xydx=4y\left(1-y^2\right)$$

ដូច្នេះ

$$h(y)=\begin{cases}4y\left(1-y^2\right), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

$$\mu_X=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx=\int_0^1 4x^3\cdot xdx=\frac{4}{5}$$

$$\mu_Y=E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy=\int_0^1 4y^2\left(1-y^2\right)dy=\frac{8}{15}$$

ចេញពីដង់ស៊ីតេបន្ទាប់បន្សំខាងលើ យើងបាន

$$E(XY)=\int_0^1\int_y^1 xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_y^1 8x^2y^2dxdy=\frac{4}{9}$$

ដូច្នេះ

$$\sigma_{XY}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$$

និយមន័យ ២.៥

តាង X និង Y ជាអថេរចៃដន្យដែលមានកូវ៉ារ្យ៉ង់ σ_{XY} និងគម្លាតស្តង់ដា σ_X និង σ_Y រៀងគ្នា។ មេគុណកូរ៉ឺឡាស្យុងរបស់ X និង Y គឺ

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

គេត្រូវដឹងថា ρ_{XY} មិនអាស្រ័យនឹងខ្នាតរបស់ X និង Y ទេ។ មេគុណកូរ៉ឺឡាស្យុងផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $-1 \le \rho_{XY} \le 1$ ។ តម្លៃរបស់វាស្មើសូន្យនៅពេល $\sigma_{XY} = 0$ ។ នៅពេលដែលមានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរផតខ្វោះ ពោលគឺ $Y \equiv a + bX$ នោះ $\rho_{XY} = 1$ បើ $b > 0$ និង $\rho_{XY} = -1$ បើ $b < 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ២.១៦ រកមេគុណកូរ៉ឺឡាស្យុងរវាង X និង Y នៅក្នុងឧទាហរណ៍២.១៤។

ដំណោះស្រាយ

$$E\left(X^2\right) = 0^2 \times \frac{5}{14} + 1^2 \times \frac{15}{28} + 2^2 \times \frac{3}{28} = \frac{27}{28}$$

$$E\left(Y^2\right) = 0^2 \times \frac{15}{28} + 1^2 \times \frac{3}{7} + 2^2 \times \frac{1}{28} = \frac{4}{7}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{27}{28} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{112}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{4}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{28}$$

ដូច្នេះ មេគុណកូរ៉ឺឡាស្យុងរវាង X និង Y គឺ

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-9/56}{\sqrt{(45/112)(9/28)}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ឧទាហរណ៍ ២.១៧ រកមេគុណកូរ៉ឺឡាស្យុងរបស់ X និង Y នៅក្នុងឧទាហរណ៍២.១៤។

ដំណោះស្រាយ

$$E\left(X^2\right) = \int_0^1 4x^5 dx = \frac{2}{3} \text{ និង } E\left(Y^2\right) = \int_0^1 4y^3\left(1 - y^2\right) dy = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{75} \text{ និង } \sigma_Y^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225}$$

ដូច្នេះ

$$\rho_{XY} = \frac{4/225}{\sqrt{(2/75)(11/225)}} = \frac{4}{\sqrt{66}}$$

២.៣ មធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់នៃបន្សំលីនេអ៊ែររបស់អថេរចៃដន្យ

(Means and Variances of Linear Combinations of Random Variables)

ទ្រឹស្តីបទ ២.៥

តាង a និង b គឺជាចំនួនថេរ។ នោះ

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ X ជាអថេរចៃដន្យដាច់នោះ

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_x (ax+b)\, f(x) \\ &= a\sum_x xf(x) + b\sum_x f(x) \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$

បើ X ជាអថេរជាប់នោះ

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)\, f(x)\,dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍២.១៨ តាង X ជាចំនួនរថយន្តដែលចូលលាងនៅកន្លែងផ្តល់សេវាកម្មលាងរថយន្តមួយ នៅចន្លោះម៉ោង៤ទៅម៉ោង៥ល្ងាចនៅថ្ងៃសុក្រមួយ មានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

តាង $g(X)=2X-1$ ជាចំនួនទឹកប្រាក់(គិតជាដុល្លា)ដែលអ្នកគ្រប់គ្រងផ្តល់ទៅឲ្យអ្នកយាមកន្លែង។ រកប្រាក់កម្រៃរំពឹងទុករបស់អ្នកយាម។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ ២.៥ ចំពោះអថេរចៃដន្យដាច់ $f(X)=2X-1$ យើងអាចសរសេរ

$$E(2X-1)=2E(X)-1$$

$$\mu=E(X)=\sum_{x=4}^{9}xf(x)$$

$$=4\times\frac{1}{12}+5\times\frac{1}{12}+6\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{41}{6}$$

ដូច្នេះ

$$\mu_{2X-1}=2\times\frac{41}{6}-1=12.67$$

ឧទាហរណ៍ ២.១៩ តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេខាងក្រោម។ រកតម្លៃរំពឹងទុកនៃ $g(X)=4X+3$ តាមទ្រឹស្តីបទ២.៥។

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}, -1<x<2\\ 0, \text{elsewhere}\end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទ២.៥ យើងបាន

$$E(4X+3)=4E(X)+3$$

តែ

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{2} x\frac{x^2}{3}\,dx=\frac{5}{4}$$

ដូច្នេះ

$$E(4X+3)=4\times\frac{5}{4}+3=8$$

ទ្រឹស្តីបទ២.៦

តម្លៃរំពឹងទុកនៃផលបូកឬផលដករបស់អនុគមន៍អថេរចៃដន្យ (function of random variable) X ពីរឬច្រើនស្មើនឹងផលបូកឬផលដកនៃតម្លៃរំពឹងទុករបស់អនុគមន៍ទាំងនោះ។

$$E\left[g(X)\pm h(X)\right]=E\left[g(X)\right]\pm E\left[h(X)\right]$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយមាន $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនោះ

$$E\left[g(X)\pm h(X)\right]=\sum_x\left[g(X)\pm h(X)\right]f(x)$$
$$=\sum_x g(x)f(x)\pm\sum_x h(x)f(x)$$
$$=E\left[g(X)\right]\pm E\left[h(X)\right]$$
ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យដាច់ និង
$$E\left[g(X)\pm h(X)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(x)\pm h(x)\right]f(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx\pm\int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x)dx$$
$$=E\left[g(X)\right]\pm E\left[h(X)\right]$$
ក្នុងករណីអថេរចៃដន្យជាប់។

ឧទាហរណ៍២.២០ តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ ដូចខាងក្រោម

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/3	1/2	0	1/6

ចូររកតម្លៃរំពឹងទុកនៃ $Y=(X-1)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ២.៦ ចំពោះអនុគមន៍ $Y=(X-1)^2$ យើងអាចសរសេរ
$$E\left[(X-1)^2\right]=E\left(X^2-2X+1\right)=E\left(X^2\right)-2E(X)+E(1)$$
ដោយ

$$E(1)=1, E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+2\times 0+3\times\frac{1}{6}=1$$

$$E\left(X^2\right)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times 0+3^2\times\frac{1}{6}=2$$

ដូច្នេះ

$$E\left[(X-1)^2\right]=2-2(1)+1=1$$

ឧទាហរណ៍ ២.២១ តម្រូវការប្រចាំសប្តាហ៍នៃភេសជ្ជៈមួយប្រភេទ(គិតជាពាន់លីត្រ) នៅក្នុងហាងលក់ទំនិញមួយគឺជាអថេរចៃដន្យជាប់ $g(X)=X^2+X-2$ ដែល X មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

$$f(x)=\begin{cases}2(x-1), 1<x<2\\ 0, \text{elsewhere}\end{cases}$$

រកតម្លៃរំពឹងទុកនៃតម្រូវការប្រចាំសប្តាហ៍នៃភេសជ្ជៈ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទ២.៦ យើងអាចសរសេរ

$$E\left(X^2+X-2\right)=E\left(X^2\right)+E(X)-E(2)$$

$$E(2)=2, E(X)=\int_1^2 2x(x-1)\,dx=\frac{5}{3}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_1^2 2x^2(x-1)\,dx=\frac{17}{6}$$

ដូច្នេះ

$$E\left(X^2+X-2\right)=\frac{17}{6}+\frac{5}{3}-2=\frac{5}{2}=2.5$$

ដូច្នេះតម្រូវការភេសជ្ជៈជាមធ្យមប្រចាំសប្តាហ៍របស់ហាងគឺ២៥០០លីត្រ។

ឧបមាថាយើងមានអថេរចៃដន្យពីរ X និង Y ដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសមាស $f(x,y)$។

ទ្រឹស្តីបទ២.៧

តម្លៃរំពឹងទុកនៃផលបូកឬផលដកនៃអនុគមន៍អថេរចៃដន្យពីរ X និង Y គឺជាផលបូកឬផលដកនៃតម្លៃរំពឹងទុករបស់អនុគមន៍ទាំងនោះ។

$$E\left[g(X,Y)\pm h(X,Y)\right]=E\left[g(X,Y)\pm h(X,Y)\right]$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមនិយមន័យ២.២យើងបាន

$$\begin{aligned}E\left[g(X,Y)\pm h(X,Y)\right]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(x,y)\pm h(x,y)\right]f(x,y)\,dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\,f(x,y)\,dxdy\\&\quad\pm\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)\,f(x,y)\,dxdy\\&=E\left[g(X,Y)\right]\pm E\left[h(X,Y)\right]\end{aligned}$$

ករណីពិសេស ២.៣

ដោយកំណត់យក $g(X,Y)=g(X)$ និង $h(X,Y)=h(Y)$ នោះយើងបាន

$$E\left[g(X)\pm h(Y)\right]=E\left[g(X)\right]\pm E\left[h(Y)\right]$$

ករណីពិសេស ២.៤

សន្មត $g(X,Y)=X$ និង $h(X,Y)=Y$ នោះយើងបាន

$$E\left[X\pm Y\right]=E(X)\pm E(Y)$$

ទ្រឹស្តីបទ២.៨

តាង X និង Y គឺជាអថេរចៃដន្យឯករាជពីរ។ នោះយើងបាន

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមនិយមន័យ២.២ យើងបាន

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\,dxdy$$

ដោយសារ X និង Y ឯករាជនោះយើងបាន

$$f(x,y)=g(x)h(y)$$

ដែល $g(x)$ និង $h(y)$ គឺជាបំណែងចែកបន្ទាប់បន្សំនៃ X និង Y រៀងគ្នា។

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyg(x)h(y)\,dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}yh(y)\,dy\\&=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

វិបាក ២.៥

តាង X និង Y ជាអថេរចៃដន្យឯករាជពីរ នោះ $\sigma_{XY}=0$ ។

ឧទាហរណ៍ ២.២២ គេដឹងថាផលធៀបនៃgalliumទៅនឹងarsenideមិនជះឥទ្ធិពលដល់ការបំពេញមុខងាររបស់gallium-arsenide waferដែលជាអង្គប្រកប(component)ដ៏សំខាន់នៃmicrochips។ តាង X ជាផលធៀបនៃgalliumទៅនឹងarsenideហើយ Y តាងwafer ដែលទទួលបានក្នុងថេរវេលា១ម៉ោង។ X និង Y គឺជាអថេរចៃដន្យឯករាជដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\left(1+3y^2\right)}{4},0<x<2,0<y<1\\0,\text{elsewhere}\end{cases}$$

បង្ហាញថា $E(XY)=E(X)E(Y)$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^2\frac{x^2y\left(1+3y^2\right)}{4}dxdy=\frac{5}{6}$$

អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេបន្ទាប់បន្សំនៃ x គឺ

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^1\frac{x\left(1+3y^2\right)}{4}dy=\frac{x}{4}\left(y+y^3\right)\Big|_0^1=\frac{x}{2}$$

ដូច្នេះ

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2\\ 0,\text{elsewhere}\end{cases}$$

អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេបន្ទាប់បន្សំនៃ y គឺ

$$h(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^2\frac{x\left(1+3y^2\right)}{4}dx$$

$$=\frac{x^2}{8}\left(1+3y^2\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(1+3y^2\right)$$

ដូច្នេះ

$$h(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+3y^2\right),0<y<1\\ 0,\text{elsewhere}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)dx=\int_0^2x\frac{x}{2}dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yh(y)\,dy=\int_0^1 y\frac{1}{2}\left(1+3y^2\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y+3y^3\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{3}{4}y^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{8}$$

ដូច្នេះ $E(X)E(Y)=\frac{4}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{6}=E(XY)$

ទ្រឹស្តីបទ ២.៩

បើ X និង Y គឺជាអថេរចៃដន្យដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេសមាស $f(x,y)$ ហើយ a,b និង c ជាចំនួនថេរនោះ

$$\sigma_{aX+bY+c}^2=a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2+2ab\sigma_{XY}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$\sigma_{aX+bY+c}^2=E\left\{\left[(aX+bY+c)-\mu_{aX+bY+c}\right]^2\right\}$$

$$\mu_{aX+bY+c}=E(aX+bY+c)$$

$$=aE(X)+bE(Y)+c=a\mu_X+b\mu_Y+c$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$\sigma_{aX+bY+c}^2=E\left\{\left[a(X-\mu_X)+b(Y-\mu_Y)\right]^2\right\}$$

$$=E\left\{a^2(X-\mu_X)^2+b^2(X-\mu_Y)^2+2ab(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right\}$$

$$=a^2E\left[(X-\mu_X)^2\right]+b^2E\left[(Y-\mu_Y)^2\right]$$

$$+2abE\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$=a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2+2ab\sigma_{XY}$$

ចេញពីទ្រឹស្តីបទ២.៩ យើងបានក្លូរ៉ូលែដូចខាងក្រោម

ក្លូរ៉ូលែ២.៦

ដោយកំណត់ $b=0$ នោះ $\sigma^2_{aX+c}=a^2\sigma^2_X=a^2\sigma^2$

ក្លូរ៉ូលែ២.៧

ដោយកំណត់ $a=1$ និង $b=0$ នោះ $\sigma^2_{X+c}=\sigma^2_X=\sigma^2$

ក្លូរ៉ូលែ២.៨

ដោយកំណត់យក $b=0$ និង $c=0$ នោះ $\sigma^2_{aX}=a^2\sigma^2_X=a^2\sigma^2$

ក្លូរ៉ូលែ២.៩

បើ X និង Y ជាអថេរចៃដន្យឯករាជនោះ $\sigma^2_{aX+bY}=a^2\sigma^2_X+b^2\sigma^2_Y$

ក្លូរ៉ូលែ២.១០

បើ X និង Y ជាអថេរចៃដន្យឯករាជនោះ $\sigma^2_{aX-bY}=a^2\sigma^2_X+b^2\sigma^2_Y$

ក្លូរ៉ូលែ២.១១

បើ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ ជាអថេរចៃដន្យឯករាជនោះ

$$\sigma^2_{a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n}=a_1^2\sigma^2_{X_1}+a_2^2\sigma^2_{X_2}+\cdots+a_n^2\sigma^2_{X_n}$$

ឧទាហរណ៍ ២.២៣ តាង X និង Y ជាអថេរចៃដន្យដែលមានវ៉ារ្យ៉ង់ $\sigma^2_X=2$ $\sigma^2_Y=4$ និងកូវ៉ារ្យ៉ង់ $\sigma_{XY}=-2$ ។ រកវ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យ $Z=3X-4Y+8$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\sigma^2_Z=\sigma^2_{3X-4Y+8}=3^2\sigma^2_X+(-4)^2\sigma^2_Y+2(3)(-4)\sigma_{XY}$$
$$=9\times2+16\times4-24(-2)=130$$

ឧទាហរណ៍ ២.២៤ តាង X និង Y ជាបរិមាណនៃសារធាតុកខ្វក់ពីរផ្សេងគ្នា នៅក្នុងផលិតផលគីមីមួយប្រភេទ។ ឧបមាថា X និង Y ជាអថេរចៃដន្យឯករាជ

ដែលមានវ៉ារ្យ៉ង់ $\sigma_X^2 = 2$ និង $\sigma_Y^2 = 3$ ។ រកវ៉ារ្យ៉ង់នៃអថេរចៃដន្យ $Z = 3X - 2Y + 5$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{3X-2Y+5}^2 = \sigma_{3X-2Y}^2 = 9\sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2 = 9\times 2 + 4\times 3 = 30$$

ឧបមាថា X ជាអថេរចៃដន្យ និង $Y = g(x)$ ដំណោះស្រាយជាទូទៅសម្រាប់ $E(Y)$ ឬ $Var(Y)$ មានការលំបាករក ហើយវាអាស្រ័យទៅលើភាពសាំញ៉ាំនៃ $g(\cdot)$ ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ យើងអាចប្រើតម្លៃប្រហែលបានដែលអាស្រ័យលើតម្លៃប្រហែលលីនេអ៊ែរនៃអនុគមន៍ $g(x)$ ។ ឧទាហរណ៍ថា យើងសន្មត $E(X)$ ជា μ ហើយ $Var(X) = \sigma_X^2$ ។ តម្លៃប្រហែលនៃស៊េរីតៃល័ររបស់ $g(x)$ ជុំវិញ $X = \mu_X$ យើងបាន

$$g(x) = g(\mu_X) + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x=\mu_X} (x - \mu_X) + \left.\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}\right|_{x=\mu_X} \frac{(x-\mu)^2}{2} + \cdots$$

តម្លៃប្រហែលលំដាប់ពីរនៃ $E\left[g(X)\right]$ តាមស៊េរីតៃល័រគឺ

$$E\left[g(X)\right] \approx g(\mu_X) + \left.\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}\right|_{x=\mu_X} \frac{\sigma_X^2}{2}$$

ឧទាហរណ៍ ២.២៥ គេមានអថេរដៃដន្យ X ដែលមានមធ្យម μ_X និងវ៉ារ្យ៉ង់ σ_X^2 ។ រកតម្លៃប្រហែលដឺក្រេទី២នៃ $E\left(e^X\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយសារ $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\right) = e^x$ និង $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^x\right) = e^x$ ដូច្នេះយើងបាន

$$E\left(e^X\right) \approx e^{\mu_X}\left(1 + \sigma_X^2 / 2\right)$$

យើងអាចបង្កើតនូវតម្លៃប្រហែលរបស់ $Var\left[g(x)\right]$ ដោយបំពាក់វ៉ារ្យ៉ង់ទៅលើអង្គសងខាងនៃស៊េរីតៃល័រលំដាប់មួយរបស់ $g(x)$ ។

$$Var\left[g(X)\right] \approx \left[\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right]^2$$

ឧទាហរណ៍ ២.២៦ ចំពោះអថេរចៃដន្យដូចក្នុងឧទាហរណ៍២.២៥ ចូររករូបមន្តប៉ាន់ប្រមាណ $Var\left[g(x)\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\right) = e^x$ ដូច្នេះ

$$Var(X) \approx \left(e^{\mu_X}\right)^2 \sigma_X^2 = e^{2\mu_X}\sigma_X^2$$

ការប៉ាន់ប្រមាណតម្លៃនេះអាចពង្រីកទៅដល់អនុគមន៍មិនលីនេអ៊ែរនៃអថេរចៃដន្យមួយឬច្រើន។

សន្មតគេមានសំណុំមួយនៃអថេរចៃដន្យឯករាជ $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ដែលមានមធ្យម $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ និងវ៉ារ្យ៉ង់ $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$ រៀងគ្នា ។ តាង

$$Y = h(X_1, X_2, \ldots, X_k)$$

ជាអនុគមន៍មិនលីនេអ៊ែរ នោះតម្លៃប្រហែលនៃ $E(Y)$ និង $Var(Y)$ គឺ

$$E(Y) \approx h(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma_i^2}{2}\left[\frac{\partial^2 h(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial x_i^2}\right]\Bigg|_{x_i=\mu_i} \quad ;1 \le i \le k$$

$$Var(Y) \approx \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial h(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial x_i}\right]^2\Bigg|_{x_i=\mu_i} \quad ;1 \le i \le k$$

ឧទាហរណ៍ ២.២៧ ពិនិត្យមើលអថេរចៃដន្យឯករាជពីរ X និង Z ដែលមានមធ្យម μ_X និង μ_Z ហើយវ៉ារ្យ៉ង់ σ_X^2 និង σ_Z^2 រៀងគ្នា។ ចំពោះអថេរចៃដន្យ

$$Y = X / Z$$

ចូររកតម្លៃប្រហែលនៃ $E(Y)$ និង $Var(Y)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $E(Y)$ យើងត្រូវរក

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x/z)=\frac{1}{z},\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{z}\right)=-\frac{x}{z^2};\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x}{z^2}\right)=\frac{2x}{z^3}$$

ដូច្នេះ

$$E(Y)\approx\frac{\mu_X}{\mu_Z}+\frac{\mu_X}{\mu_Z^3}\sigma_Z^2=\frac{\mu_X}{\mu_Z}\left(1+\frac{\sigma_Z^2}{\mu_Z^2}\right)$$

ហើយ

$$Var(Y)\approx\frac{1}{\mu_Z^2}\sigma_X^2+\frac{\mu_X^2}{\mu_Z^4}\sigma_Z^2=\frac{1}{\mu_Z^2}\left(\sigma_X^2+\frac{\mu_X^2}{\mu_Z^2}\sigma_Z^2\right)$$

២.៤ ទ្រឹស្តីបទ Chebyshev

គណិតវិទូជាតិរុស្សីP.L.Chebyshev(1821-1894)បានរកឃើញថា សមាមាត្រនៃផ្ទៃក្រឡានៅក្នុងចន្លោះរវាងតម្លៃពីរដែលឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងមធ្យម មានការជាប់ទាក់ទងទៅនឹងគម្លាតស្តង់ដា។ ដោយសារផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេឬអ៊ីស្តូក្រាមប្រូបាប៊ីលីតេ មានផលបូកស្មើមួយ នោះផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះរវាងតម្លៃពីរគឺជាប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះតម្លៃទាំងពីរនោះ។

ទ្រឹស្តីបទ ២.១០

ប្រូបាប៊ីលីតេដែលអថេរចៃដន្យ X មួយនឹងកំណត់យកតម្លៃណាមួយក្នុងចន្លោះkគម្លាតស្តង់ដាពីមធ្យម គឺយ៉ាងហោចស្មើនឹង$1-/k^2$ ។ ពោលគឺ

$$P\left(\mu-k\sigma < X < \mu+k\sigma\right) > 1-\frac{1}{k^2}$$

ចំពោះ $k=2$ នោះទ្រឹស្តីបទចែងថា ប្រូបាប៊ីលីតេដែលអថេរចៃដន្យ X ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ២គម្លាតស្តង់ដាពីមធ្យម គឺមានយ៉ាងហោចស្មើនឹង $1-1/2^2=3/4$ ។ មានន័យថាបីភាគបួនឬច្រើនជាងនេះនៃឯកត្តៈនៅក្នុងបំណែងចែកមួយ នឹងស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $\mu\pm 2\sigma$ ។ ដូចគ្នាផងដែរ ទ្រឹស្តីបទចែងថា យ៉ាងហោច៨ភាគ៩នៃឯកត្តៈរបស់បំណែងចែកមួយ ត្រូវស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $\mu\pm 3\sigma$ ។

ជំពូក៣

ប្រូបាប៊ីលីតេដាច់មួយចំនួន

៣.១ សេចក្តីផ្តើម (Introduction)

នៅក្នុងជំពូកនេះ យើងនឹងលើកអំពីបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់មួយចំនួនដែលមានសារសំខាន់នៅក្នុងការអនុវត្តជាក់ស្តែង។ ជាឧទាហរណ៍ នៅក្នុងការសិក្សាដែលទាក់ទងនឹងការធ្វើតេស្តអំពីប្រសិទ្ធភាពនៃឱសថថ្មី ចំនួនអ្នកដែលបានជាសះស្បើយចេញពីក្នុងចំណោមអ្នកជំងឺទាំងអស់ដោយសារការប្រើឱសថអាចប៉ាន់ប្រមាណដោយបំណែងចែកទ្វេធា (Binomial distribution)។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍អំពីឧស្សាហកម្ម នៅពេលដែលគំរូតាងនៃទំនិញដែលជ្រើសរើសចេញពីខ្សែសង្វាក់ផលិតកម្មមួយ ត្រូវបានធ្វើតេស្តនោះចំនួនឯកតាទំនិញដែលខូចនៅក្នុងគំរូតាងភាគច្រើនត្រូវបានតាងដោយអថេរចៃដន្យអ៊ីពែរធរណីមាត្រ។

៣.២ បំណែងចែកទ្វេធានិងពហុធា (binomial and Multinomial distribution)

ពិសោធន៍មួយរួមមានវិញ្ញាសា (trial) ច្រើននៅក្នុងនោះ។ វិញ្ញាសានីមួយៗមានលទ្ធផលចំនួនពីដែលយើងហៅថា *លទ្ធផលជោគជ័យ* (success) ឬលទ្ធផល *បរាជ័យ* (failure)។

ដំណើរការប៊ែរនូយី (Bernoulli Process)

ដំណើរការប៊ែរនូយីមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

១ ពិសោធន៍រួមមានវិញ្ញាសាច្រំដែល

២ វិញ្ញាសានិមួយៗចេញជាលទ្ធផលដែលអាចបែងចែកទៅជាជោគជ័យ។

៣ ប្រូបាប៊ីលីតេជោគជ័យដែលតាងដោយ p នៅតែដូចគ្នា (ថេរ) ពីវិញ្ញាសាមួយទៅវិញ្ញាសាមួយ។

៤ វិញ្ញាសានីមួយៗមានភាពឯករាជពីគ្នា។

ពិនិត្យមើលវិញ្ញាសាប៊ែនូយីមួយ ដែលក្នុងនោះមុខទំនិញ៣ឯកតាត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យចេញពីខ្សែសង្វាក់ផលិតកម្មមួយ។ លទ្ធផលនៃវិញ្ញាសានីមួយៗគឺខូចឬល្អ។ ឯកតាខូចនីមួយៗតាងឱ្យ*លទ្ធផលជោគជ័យ*។ ចំនួនជោគជ័យគឺជាអថេរចៃដន្យ X ដែលកំណត់យកតម្លៃពី0ដល់3។ លទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចមាននិងតម្លៃនៃ X ត្រូវបង្ហាញក្នុងតារាង៣.១។

លទ្ធផល	NNN	NDN	NND	DNN	NDD	DND	DDN	DDD
x	0	1	1	1	2	2	2	3

ដោយសន្មតថាអត្រាខូចមាន២៥%ហើយដោយឯកតានីមួយៗត្រូវជ្រើសរើសដោយឯករាជពីគ្នានោះ

$$P(NDN)=P(N)P(D)P(N)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}$$

យើងបានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X គឺ

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

៣.២.១ បំណែងចែកទ្វេធា

ចំនួនលទ្ធផលជោគជ័យនៅក្នុងវិញ្ញាសាប៊ែរនូយី ហៅថាអថេរចៃដន្យទ្វេធា (binomial random variable)។ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យដាច់នេះហៅថាបំណែងចែកទ្វេធា (binomial distribution) តម្លៃរបស់វា

តាងដោយ $b(x;n,p)$ ។ដូច្នេះចំពោះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X ដែលមានពីរឯកតាខូចគឺ

$$P(X=2)=f(2)=b\left(2;3,\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{64}$$

វិញ្ញាសាប៊ែនូយីមួយ ផ្ដល់*លទ្ធផលជោគជ័យ*(success) ដោយប្រូបាប៊ីលីតេ p និង*លទ្ធផលបរាជ័យ*(failure)ដោយប្រូបាប៊ីលីតេ $q=1-p$ ។ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យទ្វេធា X គឺជាចំនួនលទ្ធផលជោគជ័យនៅក្នុង n វិញ្ញាសាដែលឯករាជពីគ្នា ហើយត្រូវបានកំណត់ដោយ

$$b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}, x=0,1,2,\cdots,n$$

ឧទាហរណ៍៣.១ ប្រូបាប៊ីលីតេដែលគ្រឿងរបស់ម៉ាស៊ីនមួយប្រភេទអាចធន់ទ្រាំបាននៅក្នុងការពិសោធន៍មួយ ស្មើទៅនឹង $3/4$ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលគ្រឿងម៉ាស៊ីនពីរដុំក្នុងចំណោម៤ដុំ អាចធន់បាននឹងការធ្វើពិសោធន៍។

ដំណោះស្រាយ

សន្មតថាការពិសោធន៍នីមួយៗមានលក្ខណៈឯករាជពីគ្នា។ យើងមាន $p=\dfrac{3}{4}$ ចំពោះពិសោធន៍នីមួយៗ។ យើងបាន

$$b\left(2;4,\frac{3}{4}\right)=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$$

ឧទាហរណ៍៣.២ ប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកឆ្លងជំងឺម្នាក់ជាសះស្បើយពីជំងឺមួយប្រភេទ ស្មើនឹង 0.4 ។ បើមនុស្ស១៥នាក់ឆ្លងជំងឺប្រភេទនេះ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែល

ក) យ៉ាងហោច១០នាក់នឹងជាសះស្បើយវិញ

ខ) ចន្លោះពី៣នាក់ទៅ៨នាក់ជាសះស្បើយវិញ

គ) ប្រាំនាក់គត់ជាសះស្បើយវិញ។

ដំណោះស្រាយ

តាង X ជាចំនួនអ្នកជំងឺដែលជាសះស្បើយវិញ។

ក) យ៉ាងហោច១០នាក់ជាសះស្បើយវិញ

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} b(x;15,0.4)$$
$$= 1 - 0.9662$$
$$= 0.0338$$

ខ) ចន្លោះពី៣នាក់ទៅ៨នាក់ជាសះស្បើយវិញ

$$P(3 \leq X \leq 8) = \sum_{x=3}^{8} b(x;15,0.4)$$
$$= \sum_{x=0}^{8} b(x;15,04) - \sum_{x=0}^{2} b(x;15,04)$$
$$= 0.9050 - 0.0271 = 0.8779$$

គ) ប្រាំនាក់គត់ជាសះស្បើយវិញ

$$P(X = 5) = b(5,15,0.4) = 0.1859$$

ឧទាហរណ៍៣.៣ ក្រុមអ្នកលក់រាយមួយក្រុមទិញឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិចមួយប្រភេទពីផលិតករមួយ។ ផលិតករបានបញ្ជាក់ថាអត្រាខូច(defective rate)របស់ផលិតផលគឺ៣%។

ក)ក្រុមអធិការកិច្ចបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យនូវទំនិញ២០ឯកតា ចេញពីការដឹកជញ្ជូនមួយ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលក្នុង២០ឯកតានោះមានយ៉ាងហោច១ឯកតា ជាមុខទំនិញខូច។

ខ)ឧបមាថាអ្នកលក់រាយទទួលការដឹកជញ្ជូនចំនួន១០លើកក្នុង១ខែ ហើយអ្នកអធិការកិច្ច ធ្វើការជ្រើសរើស២០ឯកតាក្នុងការដឹកជញ្ជូនមួយលើកៗ ដើម្បីយកមកធ្វើតេស្ត។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃការដឹកជញ្ជូន ៣លើកគត់ដែលមួយលើកៗមានទំនិញខូច១ឯកតាយ៉ាងហោចក្នុងចំណោម២០ឯកតា។

ដំណោះស្រាយ

ក) តាង X ជាចំនួនឯកតាទំនិញដែលខូច នៅក្នុងចំណោម២០ឯកតា។ នោះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X គឺ $b(x;20,0.03)$ ។ ដូច្នេះ

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - b(0;20,0.03) = 0.4562$$

ខ) នៅក្នុងករណីនេះ ការដឹកជញ្ជូននីមួយៗអាចមានយ៉ាងហោចទំនិញខូច១ឯកតាឬក៏មិនដូច្នោះ ពោលគឺជា*លទ្ធផលជោគជ័យ*(ជោគជ័យ) និងលទ្ធផលផ្ទុយ(បរាជ័យ)។ ដូច្នេះការធ្វើតេស្តទៅលើការដឹកជញ្ជូននីមួយៗ អាចទុកថាជាវិញ្ញាសានៃពិសោធន៍ទ្វេធាដែលមាន $p = 0.4562$ (តាមសំណួរ ក)។ តាង Y ជាចំនួនការដឹកជញ្ជូនដែលក្នុងការដឹកជញ្ជូននីមួយៗមានទំនិញខូច១ឯកតាយ៉ាងតិច នោះ Y គោរពតាមបំណែងចែកទ្វេធាមួយទៀតគឺ $b(y;10,0.4562)$ ។ ដូច្នេះ

$$P(Y = 3) = \binom{10}{3} 0.4562^3 (1 - 0.4562)^7 = 0.1602$$

ដោយសារបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេរបស់អថេរចៃដន្យទ្វេធាណាមួយ អាស្រ័យតែទៅលើតម្លៃកំណត់លើ n, p និង q នោះវាមានហេតុផលក្នុងការ

កំណត់ថា មធ្យម និងវ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យទ្វេធា ក៏អាស្រ័យទៅលើតែតម្លៃរបស់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រទាំងនោះផងដែរ។

ទ្រឹស្តីបទ៣.១

មធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់របស់បំណែងចែកទ្វេធា $b(x;n,p)$ គឺ

$\mu = np$ និង $\sigma^2 = npq$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាងលទ្ធផល(outcome)នៃវិញ្ញាសា(trial) ទីjដោយអថេរចៃដន្យប៉ៃនូយី I_j ដែលកំណត់យកតម្លៃ0និង1 ហើយមានប្រូបាប៊ីលីតេរៀងគ្នាគឺ q និង p ។ ដូច្នេះ នៅក្នុងពិសោធន៍ទ្វេធាទាំងមូលមួយចំនួន*លទ្ធផលជោគជ័យ*អាចតាងដោយផលបូក

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

មធ្យមរបស់ I_j ណាមួយគឺ

$$E(I_j) = (0)(q) + (1)(p) = p$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\mu = E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \cdots + E(I_n)$$
$$= p + p + \cdots + p = np$$

វ៉ារ្យ៉ង់របស់ I_j ណាមួយគឺ

$$\sigma_{I_j}^2 = E(I_j^2) - p^2 = (0)^2(q) + (1)^2(p) = p^2$$
$$= p(1-p) = pq$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\sigma_X^2 = \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \cdots + \sigma_{I_n}^2 = pq + pq + \cdots + pq = npq$$

ឧទាហរណ៍៣.៤ គេលើកឡើងថានៅក្នុងសហគមន៍ក្នុងតំបន់ដាច់ស្រយាលមួយ អណ្តូងទឹកចំនួន៣០%មានសារជាតុកខ្វក់។ ដើម្បីពិនិត្យមើលឱ្យបានល្អិតល្អន់ក្នុងបញ្ហានេះ គេចាំបាច់ត្រូវតែយកទឹកអណ្តូងទាំងនោះមកធ្វើការពិសោធមើល។ ដោយសារថវិកាសម្រាប់ចំណាយមានកំណត់គេមិនអាចធ្វើចំពោះគ្រប់អណ្តូងបានទេ។ គេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យតែចំនួន១០អណ្តូងប៉ុណ្ណោះ។

ក) ដោយប្រើបំណែងចែកទ្វេធា រកប្រូបាបប៊ីលីតេដែលអណ្តូង៣គត់មានសារជាតុកខ្វក់។

ខ) ប្រូបាប៊ីលីតេដែលអណ្តូងលើលពី៣មានសារជាតុកខ្វក់។

ដំណោះស្រាយ

ក)យើងត្រូវរក

$$P(X=3)=b(3;10,0.3)=0.2668$$

ខ)ក្នុងករណីនេះយើងបាន

$$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\sum_{x=0}^{3}b(x;10,0.3)$$

$$=1-0.6496=0.3504$$

ឧទាហរណ៍៣.៥ រកមធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់របស់បំណែងចែកទ្វេធាក្នុងឧទាហរណ៍ ៣.២ បន្ទាប់មកប្រើទ្រឹស្តីបទChebyshevដើម្បីបកស្រាយចន្លោះ $\mu\pm 2\sigma$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $n=15$ $p=0.4$ នោះយើងបាន

$$\mu=np=(15)(0.4)=6$$

$$\sigma^2=npq=(15)(0.4)(0.6)=3.6$$

ដូច្នេះ

$\sigma = \sqrt{3.6} = 1.897$

ចន្លោះដែលយើងត្រូវរកនោះគឺ $6 \pm 2(1.897)$ ឬចន្លោះ $2.206, 9.794$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទChebyshevយើងសន្និដ្ឋានថាក្នុងចំណោមអ្នកឆ្លងជំងឺទាំង១៥នាក់ ប្រូបាប៊ីលីតេដែលមានការជាសះស្បើយពី២ (2.206) ទៅ១០(9.794)នាក់គឺស្មើនឹង៣ភាគ៤(២គម្លាតស្តង់ដា)។

៣.២.២ ពិសោធន៍ពហុធានិងបំណែងចែកពហុធា

ពិសោធន៍ទ្វេធាក្លាយទៅជាពិសោធន៍ពហុធាបើសិនជា វិញ្ញាសានីមួយៗចេញអាចចេញជាលទ្ធផលលើសពីពីរ។

ជាទូទៅបើវិញ្ញាសាមួយអាចផ្តល់ជាលទ្ធផលណាមួយក្នុងចំណោម k លទ្ធផល $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ដោយប្រូបាប៊ីលីតេរៀងគ្នា $p_1, p_2, \ldots, p_k$ នោះបំណែងចែកពហុធានឹងផ្តល់ប្រូបាប៊ីលីតេដែល E_1 កើតឡើង x_1 ដង E_2 កើតឡើង x_2 ដង...រហូតដល់ E_k កើតឡើង x_k ដង នៅក្នុងnវិញ្ញាសាឯករាជពីគ្នា ដែលក្នុងនោះ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$$

យើងតាងប្រូបាប៊ីលីតេសមាសនេះដោយ

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k, n\right)$$

ដែល

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$$

ដើម្បីទាញរករូបមន្តទូទៅ យើងធ្វើវាតាមរបៀបដូចក្នុងបំណែងចែកទ្វេធាដែរ។ ដោយសារវិញ្ញាសានិមួយៗឯករាជពីគ្នា នោះចំពោះតម្រៀបណាមួយដែលនាំឱ្យបាន x_1 លទ្ធផលចំពោះ E_1 x_2 លទ្ធផលចំពោះ E_2 រហូតដល់

x_k ចំពោះ E_k វានឹងកើតឡើងដោយប្រូបាប៊ីលីតេ $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$ ។ ចំនួនសរុបនៃតម្រៀបដែលនាំឱ្យបានលទ្ធផលដូចគ្នាចំពោះ n វិញ្ញាសា ស្មើទៅនឹងចំនួននៃការបំបែក n ធាតុទៅជា k ក្រុមដែលមាន x_1 ក្នុងក្រុមទី១ x_2 ក្នុងក្រុមទី២ និងរហូតដល់ x_k នៅក្នុងក្រុមទី k ។យើងបានចំនួនតម្រៀបទាំងអស់គឺ

$$\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_n} = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!}$$

ដោយសារបំណែងចែកទាំងអស់មានលក្ខណៈដាច់ៗពីគ្នាហើយកើតឡើងដោយប្រូបាប៊ីលីតេស្មើៗគ្នា នោះយើងទទួលបានបំណែងចែកពហុធាដោយគុណប្រូបាប៊ីលីតេនៃតម្រៀបជាក់លាក់មួយនឹងចំនួនសរុបនៃតម្រៀប។

បើវិញ្ញាសាមួយអាចចេញជា k លទ្ធផល $E_1, E_2, \dots, E_k$ ដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេ $p_1, p_2, \dots, p_k$ រៀងគ្នា នោះបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេរបស់អថេរចៃដន្យ $X_1, X_2, \dots, X_k$ ដែលតាងឱ្យចំនួននៃការកើតឡើងនៃ $E_1, E_2, \dots, E_k$ នៅក្នុង n វិញ្ញាសាឯករាជគឺ

$$f\left(x_1, x_2, \dots x_k; p_1, p_2, \dots p_k, n\right) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

ដែល $\sum_{i=1}^{k} x_i = n, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ ។

ឧទាហរណ៍៣.៦ ភាពមមាញឹកនៃការចុះចតនិងការចេញដំណើររបស់យន្តហោះ គឺជាអ្វីដែលគេត្រូវការធ្វើត្រាប់ក្នុងកុំព្យូទ័រ(computer Simulation) ហើយត្រូវប្រើប្រាស់ដើម្បីធ្វើជាម៉ូដែលក្នុងល័ក្ខខ័ណ្ឌឥតខ្ចោះមួយ។ ចំពោះព្រលានយន្តហោះមួយដែលមានផ្លូវរត់៣ខ្សែ គេដឹងថាលក្ខខណ្ឌឥតខ្ចោះរបស់វានោះគឺប្រូបាប៊ីលីតេដែលផ្លូវរត់នីមួយៗទទួលការចុះចតដោយចៃដន្យនៃយន្តហោះជំនួញគឺៈផ្លូវរត់ទីមួយដោយប្រូបាប៊ីលីតេ $p_1 = 2/9$ ផ្លូវរត់

ទី២ដោយប្រូបាប៊ីលីតេ $p_2 = 1/6$ និងផ្លូវរត់ទី៣ដោយប្រូបាប៊ីលីតេ $p_3 = 11/18$ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលយន្តហោះ៦គ្រឿងចុះចតដោយចៃដន្យតាមរបៀបដែលផ្លូវរត់ទី១មានយន្តហោះ២ ផ្លូវរត់ទី២មានយន្តហោះ១ និងផ្លូវរត់ទី៣មានយន្តហោះ៣ ចុះចត។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើបំណែងចែកពហុធា យើងបាន

$$f\left(2,1,3;\frac{2}{9},\frac{1}{6},\frac{11}{18},6\right) = \binom{6}{2,1,3}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{11}{18}\right)^3$$

$$= \frac{6}{2!1!3!}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{11}{18}\right)^3 = 0.1127$$

ឧទាហរណ៍៣.៧ ក្នុងស្បោងមួយមានបាល់ពណ៌ក្រហមចំនួន៨ បាល់ពណ៌លឿងចំនួន៣ និងបាល់ពណ៌សចំនួន៩។ បាល់ចំនួន៦ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យតាមរបៀបនៃការដាក់ចូលទៅវិញ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃការជ្រើសរើសបានបាល់ក្រហម២ បាល់លឿង១ និងបាល់ស៣។

ដំណោះស្រាយ

តាង X_1 ចំនួនបាល់ពណ៌ក្រហម X_2 ពណ៌លឿង X_3 បាល់ពណ៌ស នោះយើងបាន $p_1 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{3}{20}, p_3 = \frac{9}{20}$ ។ហើយ

$$f\left(2,1,3;\frac{2}{5},\frac{3}{20},\frac{9}{20},6\right) = \binom{6}{2,1,3}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{20}\right)^1\left(\frac{9}{20}\right)^3 = 0.13122$$

៣.៣ បំណែងចែកអ៊ីពែរធរណីមាត្រ(Hyper-geometric Distribution)

បំណែងចែកអ៊ីពែធរណីមាត្រ មានលក្ខណៈខុសពីបំណែងចែកទ្វេធា នៅត្រង់ថាវាមិនទាមទារនូវភាពឯករាជនៃវិញ្ញាសា ពោលគឺគំរូតាងត្រូវបានធ្វើឡើងតាមរបៀបមិនដាក់ចូលទៅវិញ(without replacement)។ បំណែងចែកអ៊ីពែរធរណីមាត្រត្រូវបានយកទៅប្រើប្រាស់នៅក្នុងវិស័យជាច្រើនដូចជា នៅក្នុងការសម្រេចទទួលយកគំរូតាង តេស្តគ្រឿងអេឡិចត្រូនិច និងការធានាគុណភាពជាដើម។ ជាក់ស្តែងនៅក្នុងវិស័យទាំងនេះ តេស្តទាំងឡាយត្រូវបានធ្វើឡើងដោយត្រូវចំណាយចោលនូវរបស់ដែលត្រូវធ្វើតេស្ត ក្នុងន័យថារបស់ដែលត្រូវបានជ្រើសរើសយកមកធ្វើតេស្តនោះត្រូវខូចខាត មិនអាចដាក់ចូលទៅវិញបានទេ។

នៅក្នុងពិសោធន៍អ៊ីពែរធរណីមាត្រ យើងផ្តោតទៅលើប្រូបាប៊ីលីតេនៃការជ្រើសរើស x លទ្ធផលជោគជ័យ ពីក្នុងចំណោម k ធាតុដែលឱ្យឈ្មោះថាលទ្ធផលជោគជ័យ(success)និងចំនួន $(n-x)$ លទ្ធផលបរាជ័យ (failure)ចេញពីក្នុងចំណោម $(N-k)$ ធាតុដែលឱ្យឈ្មោះថាលទ្ធផលបរាជ័យនៅក្នុងលក្ខខណ្ឌដែលគំរូតាងទំហំ n ត្រូវបានជ្រើសរើសចេញពីក្នុងចំណោម N ។

ពិសោធន៍អ៊ីពែរធរណីមាត្រមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម

១)គំរូតាងដែលមានទំហំ n ត្រូវបានជ្រើសរើសតាមរបៀបមិនដាក់ចូលទៅវិញពីក្នុងចំណោម N ធាតុ។

២)ក្នុងចំណោម N ធាតុ មានការបែងចែកជាពីរប្រភេទគឺ ប្រភេទជាជោគជ័យដែលមានចំនួន k និងប្រភេទបរាជ័យដែលមានចំនួន $N-k$ ធាតុ។

ចំនួន X ដែលតាងឱ្យលទ្ធផលជោគជ័យនៅក្នុងពិសោធន៍អ៊ីពែធរណីមាត្រ ហៅថាអថេរចៃដន្យអ៊ីពែរធរណីមាត្រ (hyper-geometric random variable)។ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យអ៊ីពែរធរណីមាត្រ ហៅថាបំណែងចែកអ៊ីពែរធរណីមាត្រ (hyper-goemetric distribution) ហើយតម្លៃរបស់វាតាងដោយ $h(x;N,n,k)$ ។ វាអាស្រ័យលើចំនួនលទ្ធផលជោគជ័យ k នៅក្នុងសំណុំដែលមាន N ជាតុដែលចេញពីក្នុងនោះយើងជ្រើសរើសគំរូតាងទំហំ n ។

បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យអ៊ីពែរធរណីមាត្រ X ដែលជាចំនួនជោគជ័យនៅក្នុងគំរូតាងចៃដន្យទំហំ n ចេញពី N ជាតុដែលកនុងនោះមានចំនួន k ឈ្មោះថាលទ្ធផលជោគជ័យ និង $N-k$ ជាលទ្ធផលបរាជ័យកំណត់ដោយ

$$h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

ដែល

$$\max\{0,n-(N-k)\}\le x\le \min\{n,k\}$$

ឧទាហរណ៍៣.៨ ក្នុងឡូត៍ឥវ៉ាន់ដែលនីមួយៗមានទំនិញ៤០ដុំ គេដឹងថាមានទំនិញខូច៣ដុំ។ គេជ្រើសរើសទំនិញ៥ដុំដោយចៃដន្យពីឡូត៍ទំនិញមួយ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៅការជ្រើសរើសចំទំនិញខូច១ដុំ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើបំណែងចែកអ៊ីពែធរណីមាត្រដែល $n=5$ $N=40,$ $k=3, x=1$ យើងរកប្រូបាប៊ីលីតេដែលជ្រើសរើសបានទំនិញខូច១ដុំគត់

$$h(1;40,5,3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}=0.3011$$

ទ្រឹស្តីបទ៣.២

មធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់នៃបំណែងចែកអ៊ីពែធរណីមាត្រ $h(x;N,n,k)$ គឺ

$$\mu=\frac{nk}{N} \text{ និង } \sigma^2=\frac{N-n}{N-1}n\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

ឧទាហរណ៍៣.៩ រកមធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់នៃអថេរចៃដន្យនៅក្នុងឧទាហរណ៍៣.៨ រួចប្រើទ្រឹស្តីបទChebyshevដើម្បីបកស្រាយចន្លោះ $\mu\pm 2\sigma$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយឧទាហរណ៍៣.៨គឺជាពិសោធន៍អ៊ីពែធរណីមាត្រដែលមាន $N=40$ $n=5$ $k=3$ នោះយើងបាន

$$\mu=\frac{5\times 3}{40}=\frac{3}{8}=0.375 \text{ និង}$$

$$\sigma^2=\frac{40-5}{39}(5)\left(\frac{3}{40}\right)\left(1-\frac{3}{40}\right)=0.3113$$

ដូច្នេះ $\sigma=\sqrt{0.3113}=0.558$ ។

ចន្លោះដែលត្រូវរកគឺ $\mu\pm 2\sigma=0.375\pm(2)(0.558)$ ឬពី -0.741 ទៅ 1.491 ។ តាមទ្រឹស្តីបទChebyshev ប្រូបាប៊ីលីតេស្មើយ៉ាងហោច ¾ ដែលនៅក្នុងគំរូតាងទំនិញ៥ដុំ មានទំនិញខូច២ដុំ (1.491)។

បំណែងចែកអ៊ីពែរធរណីមាត្រអាចពង្រីកដល់ករណីដែល N ធាតុត្រូវបានបែងចែកជា k ប្រភេទ $A_1,A_2,\ldots,A_k$ ដែល a_1 ជាចំនួនធាតុក្នុង A_1 a_2 ជាចំនួនធាតុក្នុង A_2 រហូតដល់ a_k ជាចំនួនធាតុក្នុង A_k ។ យើងចង់រកប្រូបាប៊ីលី

តេដែលនៅក្នុងគំរូតាងទំហំ n យើងបាន x_1 មកពី A_1 x_2 មកពី A_2 និង x_k មកពី A_k ។ ប្រូបាប៊ីលីតេនេះកំណត់ដោយ

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k; a_1, a_2, \ldots, a_k, N, n\right) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

ដែល $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ និង $\sum_{i=1}^{k} a_i = N$

ឧទាហរណ៍៣.១០ មនុស្សមួយក្រុមក្នុងនោះមានគ្នា១០នាក់ បានចូលរួមនៅក្នុងការពិសោធន៍បែបជីវសាស្ត្រមួយ។ នៅក្នុងក្រុមនោះអ្នកមានឈាមប្រភេទOមានចំនួន៣នាក់ ប្រភេទAចំនួន៤នាក់ និងប្រភេទBចំនួន៣នាក់។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលក្នុងគំរូតាងទំហំ៥ មានអ្នកឈាមOម្នាក់ ឈាមAចំនួន២នាក់ និងឈាមBចំនួន២នាក់។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2$ $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 3$ $N = 10, n = 5$ ។យើងរកប្រូបាប៊ីលីតេ

$$f\left(1,2,2;3,4,3;10,5\right) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{3}{14}$$

៣.៤ បំណែងចែកព័រសុង (Poisson Distribution)

ពិសោធន៍ទាំងឡាយណាដែលផ្តល់លទ្ធផលជាតម្លៃលេខរបស់អថេរចៃដន្យ X ដែលតាងឱ្យចំនួនដងនៃការកើតឡើងនៅក្នុងចន្លោះពេល១ ឬផ្នែកណាមួយជាក់លាក់ ហៅថាពិសោធន៍ព័រសុង (Poisson experiment)។

ចន្លោះពេលអាចជាថេរវេលាមួយដូចជាមួយនាទី មួយថ្ងៃ មួយខែ ឬមួយឆ្នាំក៏បាន។ រីឯផ្ទៃកជាក់លាក់មួយ អាចជាអង្កត់មួយ ផ្ទៃក្រឡា មាឌ ឬចំណែកមួយនៃរូបធាតុអ្វីមួយ។ ពិសោធន៍ព័រសុង ក្លាយមកពីដំណើរការព័រសុង(Poisson Process)ដែលមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោមនេះ។

១) ចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើងនៅក្នុងចន្លោះពេល១ ឬផ្ទៃកមួយនៃលំហ មិនជាប់ទាក់ទងនឹងចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើងនៅក្នុងចន្លោះពេលឬក្នុងផ្ទៃកមួយផ្សេងទៀតទេ។ នៅក្នុងន័យនេះ យើងថាដំណើរការព័រសុងគ្មាន« ការចងចាំ»ទេ។

២)ប្រូបាប៊ីលីតេដែលលទ្ធផលមួយកើតឡើងក្នុងចន្លោះពេលខ្លីមួយឬផ្ទៃកតូចមួយសមាមាត្រទៅនឹងថេរវេលានៃចន្លោះពេលឬទំហំនៃផ្ទៃកនោះ ហើយមិនអាស្រ័យទៅលើចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើងខាងក្រៅចន្លោះពេលឬផ្ទៃកនោះឡើយ។

៣)ប្រូបាប៊ីលីតេដែលលទ្ធផល(outcome)ច្រើនជាង១កើតឡើងក្នុងចន្លោះពេលខ្លីមួយឬផ្ទៃកតូចមួយបែបនោះគឺអាចចោលបាន។

ចំនួន X ដែលជាការកើតឡើងលទ្ធផលក្នុងពិសោធន៍ព័រសុង ហៅថាអថេរចៃដន្យព័រសុង ហើយបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេរបស់វាហៅថាបំណែងចែកព័រសុង។ មធ្យមនៃចំនួនលទ្ធផលគឺ $\mu = \lambda t$ ដែល t ជារយៈពេល ឬចំងាយ ឬក្រឡាផ្ទៃឬមាឌ។ ប្រូបាប៊ីលីតេគេតាងដោយ $p(x;\lambda t)$ ។

បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យព័រសុង X កំណត់ដោយ

$$p(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, x = 0,1,2,...$$

ដែល λ ជាចំនួនមធ្យមនៃលទ្ធផលក្នុង១ឯកតាពេល ចំងាយ ផ្ទៃក្រឡា ឬមាឌ។

ឧទាហរណ៍៣.១១ នៅក្នុងការពិសោធន៍ក្នុងមន្ទីរពិសោធន៍មួយ ចំនួនភាគល្អិតវិទ្យុសកម្មដែលឆ្លងកាត់counterមួយ មានជាមធ្យម៤ ក្នុងមួយមីលីវិនាទី។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលភាគល្អិតវិទ្យុសកម្មចំនួន៦ចូលក្នុងcounterនៅក្នុង១មីលីវិនាទីណាមួយ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើបំណែងចែកព័រសុង ដែលមាន $x=6, \lambda t=4$ នោះយើងបាន

$$p(6;4)=\frac{e^{-4}4^{6}}{6!}=0.1042$$

ឧទាហរណ៍៣.១២ កំពង់ផែមួយទទួលយកស៊ីទែនប្រេងជាមធ្យមចំនួន១០ ក្នុង១ថ្ងៃ។ ការទុកដាក់ស៊ីទែនប្រេង អាចបានយ៉ាងច្រើនត្រឹម១៥ ក្នុង១ថ្ងៃ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលនៅថ្ងៃណាមួយស៊ីទែនប្រេងត្រូវគេបញ្ជូនចេញពីកំពង់ផែវិញព្រោះលើសចំនួនដែលអាចទុកដាក់បានក្នុង១ថ្ងៃ។

ដំណោះស្រាយ

តាង X ជាចំនួនស៊ីទែនដែលគេដឹកមកដល់ក្នុង១ថ្ងៃ នោះយើងត្រូវរក $P(X>15)$ ។

$$\begin{aligned} P(X>15) &= 1-P(X\le 15) \\ &= 1-\sum_{x=0}^{15} p(x;10) \\ &= 1-0.9513=0.0467 \end{aligned}$$

មធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់របស់បំណែងចែកព័រសុង $p(x;\lambda t)$ គឺ λt ។

តាង X ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា ដែលមានបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ $b(x;n,p)$ ។ នៅពេលដែល $n \to \infty, p \to 0$ និង $np \xrightarrow{n\to\infty} \mu$ ជាចំនួនថេរ នោះ

$$b(x;n,p) \xrightarrow{n\to\infty} p(x;\mu)$$

ឧទាហរណ៍៣.១៣ នៅក្នុងរោងចក្រឧស្សាហកម្មមួយ គ្រោះថ្នាក់កើតឡើងមិនញឹកញាប់ទេ។ គេដឹងថាប្រូបាប៊ីលីតេដែលគ្រោះថ្នាក់កើតឡើងនៅក្នុងថ្ងៃណាមួយគឺ 0.005 ហើយគ្រោះថ្នាក់កើតឡើងដោយមិនទាក់ទងគ្នាទេ។

ក)រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលនៅក្នុងកំលុងពេល៤០០ថ្ងៃណាមួយនឹងមានគ្រោះថ្នាក់១កើតឡើងក្នុង១ថ្ងៃ។

ខ)រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលមានយ៉ាងច្រើន៣ថ្ងៃដែលមានគ្រោះថ្នាក់កើតឡើង១។

ដំណោះស្រាយ

X ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា ដែល $n = 400$ $p = 0.005$ ។ ដូច្នេះ $np = 2$ ។ដោយប្រើតម្លៃប្រហែលព័រសុង យើងបាន

ក) $P(X=1) = \dfrac{e^{-2}2^1}{1!} = 0.271$

ខ) $P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} \dfrac{e^{-2}2^x}{x!} = 0.857$

ចំណុចសំខាន់ៗនៅក្នុងជំពូកនេះ គឺការសិក្សាអំពីលក្ខណៈនិងការគណនាបំណែងចែកទ្វេធា បំណែងចែកmultinomial បំណែងចែកអ៊ីពែធរណីមាត្រ បំណែងចែកព័រសុង និងការគណនាតម្លៃប្រហែលបំណែងចែកទ្វេធាដោយប្រើបំណែងចែកព័រសុង។

ជំពូក៤
បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់មួយចំនួន

អថេរចៃដន្យជាប់ជាអថេរដែលតម្លៃរបស់វាមិនអាចរាប់បាន ហើយ កំណត់នៅក្នុងចន្លោះណាមួយ ដូចជាកំពស់(គិតជាម៉ែត្រ) ប្រាក់ចំណូល(ជារៀល) ជាដើម។ បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យជាប់ *ហៅថាបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់*។ នៅក្នុងជំពូកនេះ យើងនិយាយអំពីបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់ចំនួនពីរប្រភេទ គឺបំណែងចែកឯកសណ្ឋានជាប់ និងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលជាបំណែងចែកដ៏មានសារៈសំខាន់ មានការប្រើប្រាស់ច្រើននៅក្នុងវិស័យស្ថិតិវិទ្យានិងការវិភាគទិន្នន័យ។

៤.១ បំណែងចែកឯកសណ្ឋានជាប់(Continuous Uniform Distribution)

ឧទាហរណ៍ដែលសមញ្ញបំផុតមួយអំពីបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់គឺ *បំណែងចែកឯកសណ្ឋានជាប់*។ បំណែងចែកនេះ កំណត់លក្ខណៈដោយអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេថេរ។ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេមានតម្លៃស្មើគ្នានៅក្នុងចន្លោះបិទ$[a,b]$ មួយ។

អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៃអថេរចៃដន្យឯកសណ្ឋានជាប់ X នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំណត់ដោយ

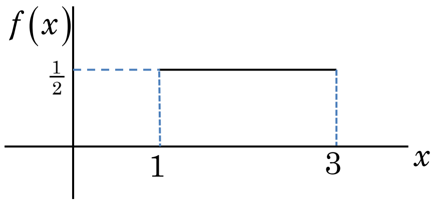
$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

បំណែងចែកនេះមានទ្រង់ទ្រាយជាចតុកោណកែង ដែលមានបាតប្រវែង $b-a$ និងកំពស់ថេរប្រវែង $1/(b-a)$[1] ។

ឧទាហរណ៍៤.១ សាលសន្និសីទមួយអាចបម្រើបានតែក្នុងរយៈពេលមិនលើលពី៤ម៉ោង។ សន្និសីទរយៈពេលយូរនិងឆាប់ត្រូវប្រារព្ធធ្វើឡើងយ៉ាងញឹកញាប់នៅទីនោះ។ គេអាចសន្មតថារយៈពេល X នៃសន្និសីទមានបំណែងចែកឯកសណ្ឋាននៅលើចន្លោះ $[1,4]$ ។

ក) រកអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ។

ខ)រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលសន្និសីទណាមួយមានរយៈពេល៣ម៉ោងយ៉ាងហោច។



រូប៤-១ អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៃអថេរចៃដន្យក្នុងចន្លោះ $[1,3]$

ដំណោះស្រាយ

ក) អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៃអថេរចៃដន្យ X កំណត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, 0\le x\le 4\\ 0, \text{elsewhere}\end{cases}$$

ខ) $P[X\ge 3]=\int_3^4 \frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(4-3)=\frac{1}{4}$

[1] បាតនិងកំពស់នៅទីនេះសំដៅទៅលើវិមាត្រទាំងពីររបស់ចតុកោណកែង គឺ មួយជាប្រវែងបណ្តោយនិងមួយទៀតជាប្រវែងទទឹង។

ទ្រឹស្តីបទ៤.១

មធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់នៃបំណែងចែកឯកសណ្ឋានគឺ

$$\mu = \frac{a+b}{2} \text{ និង } \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមនិយមន័យ២.២

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

យើងបាន

$$\mu = \int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b$$

$$= \frac{1}{2(b-a)}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{a+b}{2}$$

និយមន័យ២.៤ យើងមាន

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

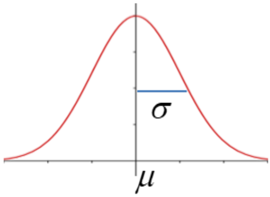
ដូច្នេះ

$$\sigma^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

៤.២ បំណែងចែកន័រម៉ាល់

បំណែងចែកន័រម៉ាល់ជាបំណែងចែកដែលមានសារៈសំខាន់ខ្លាំង ហើយត្រូវគេប្រើប្រាស់នៅក្នុងវិស័យស្ថិតិវិទ្យាទាំងមូល។ ក្រាហ្វរបស់វាដែលគេហៅឈ្មោះថា*ខ្សែកោងន័រម៉ាល់* មានសណ្ឋានជារាង«ជួង» (រូប៦.២) ។



រូប៤-២៖ខ្សែកោងន័រម៉ាល់

នៅឆ្នាំ១៧៣៣ Abraham DeMoivre បានបង្កើតសមីការគណិតវិទ្យារបស់ខ្សែកោងន័រម៉ាល់នេះឡើង។ វាជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការចាប់ផ្ដើមនូវទ្រឹស្ដីជាច្រើននៅក្នុងស្ថិតិវិទ្យា។ បំណែងចែកន័រម៉ាល់នេះក៏ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជា *បំណែងចែកហ្គោស*(Gaussian distribution) ដើម្បីជាកិត្តិយសដល់ Karl Friedrich Gauss (១៧៧៧, ១៨៥៥)[2]។

អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេរបស់អថេរចៃដន្យ X ដែលមានមធ្យម μ និងវ៉ារ្យ៉ង់ σ^2 ត្រូវកំណត់ដោយ

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2};-\infty<x<+\infty$$

ដែល $\pi=3.14159...$ និង $e=2.71828...$ ។

លក្ខណៈសំខាន់ៗមួយចំនួននៃខ្សែកោងន័រម៉ាល់:

1) ម៉ូដជាចំណុចនៅលើអ័ក្សដេក ដែលស្ថិតនៅចំកន្លែងខ្សែកោងខ្ពស់បំផុត។ វាកើតមាននៅត្រង់ចំណុច $x=\mu$ ។
2) ខ្សែកោងមានភាពឆ្លុះគ្នាធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ឈរដែលរត់កាត់តាមមធ្យម μ ។

---

[2] Probability and Statistics for Engineer p.172-173

3) ខ្សែកោងមានចំណុចរបត់នៅត្រង់ $x=\mu\pm\sigma$ ។ វាផតបែរចុះក្រោម បើ $\mu-\sigma<X<\mu+\sigma$ ហើយផតបែរឡើងលើ នៅក្រៅចន្លោះនេះ។

4) ខ្សែកោងន័រម៉ាល់ខិតទៅរក អ័ក្សដេកក្នុងលក្ខណៈជាអាស៊ីមតូតក្នុងទិសដៅទៅឆ្វេងឬទៅស្តាំឃ្លាតពី μ ។

5) ផ្ទៃក្រឡាសរុបនៅចន្លោះខ្សែកោងនិងអ័ក្សដេក មានតម្លៃស្មើ១។

ទ្រឹស្តីបទ៤.២

មធ្យមនិងវ៉ារ្យ៉ង់របស់ $n(x;\mu,\sigma)$ គឺ μ និង σ^2 រៀងគ្នា។ ដូច្នេះហើយគម្លាតគំរូគឺ σ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដំបូងយើងរក $E(X-\mu)$

$$E(X-\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

យក $z=(x-\mu)/\sigma$ នោះ $dx=\sigma dz$ យើងបាន

$$E(X-\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz=0$$

$$E(X-\mu)=0$$

$$E(X)-\mu=0$$

នោះយើងបាន

$$E(X)=\mu$$

វ៉ារ្យ៉ង់របស់បំណែងចែកគឺ

$$E\left[\left(X-\mu\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mu\right)^2 e^{-\frac{1}{2}\left[\left(x-\mu\right)/\sigma\right]^2}dx$$

យក $z=\left(x-\mu\right)/\sigma$ នោះ $dx=\sigma dz$

យើងបាន

$$E\left[\left(X-\mu\right)^2\right]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដែល $u=z$ និង $dv=ze^{-z^2/2}dz$ នោះ $du=dx$ និង $v=-e^{-z^2/2}$ យើងបាន

$$E\left[\left(X-\mu\right)^2\right]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2/2}dz\right)$$

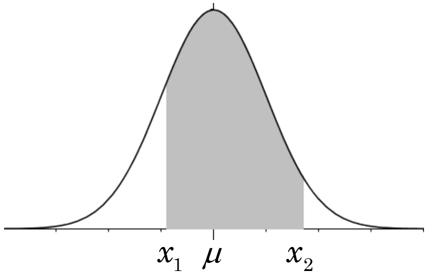
$$=\sigma^2\left(0+1\right)=\sigma^2$$

៤.៣ ផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោងន័រម៉ាល់ (Area Under the Normal Curve)

ខ្សែកោងរបស់បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់ណាមួយ ឬអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេណាមួយ ត្រូវបង្កើតឡើងក្នុងរបៀបយ៉ាងណាឱ្យផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោងក្នុងចន្លោះ $x=x_1$ និង $x=x_2$ ស្មើនឹងប្រូបាប៊ីលីតេដែលអថេរចៃដន្យ X នៅក្នុងចន្លោះ $x=x_1$ និង $x=x_2$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះខ្សែកោងន័រម៉ាល់ក្នុងរូប៤-៣

$$P\left(x_1<X<x_2\right)=\int_{x_1}^{x_2}n\left(x;\mu,\sigma\right)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu\right)^2}dx$$

ត្រូវតំណាងដោយតំបន់ដែលមានផ្ទៃធូតៗ។



រូប៤-៣៖ $P(x_1 < X < x_2) =$ ផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ឆូតៗ

ដើម្បីគណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល X ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះមួយ គេត្រូវធ្វើអាំងតេក្រាលអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលជាកិច្ចការស្មុគស្មាញ ហើយវារឹតតែស្មុគស្មាញទៅទៀតដោយសារអនុគមន៍នេះប្រែប្រួលអាស្រ័យលើប៉ារ៉ាម៉ែត្រចំនួនពីរ គឺ μ និង σ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ ហើយទើបគេបំប្លែងអនុគមន៍ទាំងអស់នេះទៅជាអនុគមន៍មួយដែលមានមធ្យមស្មើ0 និងវ៉ារ្យ៉ង់ស្មើ១ ដែលគេស្គាល់ថាជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា។ អថេរចៃដន្យថ្មី តាងដោយ Z ដែល

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

នៅពេលដែលអថេរចៃដន្យ X កំណត់យកតម្លៃ x ណាមួយ នោះអថេរចៃដន្យ Z មានតម្លៃ $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ។

ដូច្នេះ យើងអាចសរសេរ

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$
$$= \int_{z_1}^{z_2} n(z;0,1) dz = P(z_1 < Z < z_2)$$

និយមន័យ ៤.១

បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យម០ និងវ៉ារ្យង់១ ហៅថាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា។

តារាងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដាត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីរកផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោង។ ផ្ទៃក្រឡានេះគឺជាប្រូបាប៊ីលីតេ។

ឧទាហរណ៍៤.២ ចំពោះបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា ចូររកផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោងដែល

ក)នៅខាងស្តាំ $z = 1.84$

ខ) ក្នុងចន្លោះ $z = -1.97$ និង $z = 0.86$

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើតារាងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា

ក) នៅខាងស្តាំ $z = 1.84$

$$P(Z > 1.84) = 1 - P(Z < 1.84) = 1 - 0.9671 = 0.0329$$

ខ) ក្នុងចន្លោះ $z = -1.97$ និង $z = 0.86$

$$P(-1.97 < Z < 0.86) = P(Z < 0.86) - P(Z < -1.97)$$
$$= 0.8051 - 0.0244 = 0.7807$$

ឧទាហរណ៍៤.៣ នៅក្នុងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដាមួយ ចូររកតម្លៃនៃ k ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ក) $P(Z > k) = 0.3015$

ខ) $P(k < Z < -0.18) = 0.4197$

ដំណោះស្រាយ

ក) ដោយ $P(Z > k) = 0.3015$ នោះក្រឡាផ្ទៃនៅខាងឆ្វេង k គឺ $P(Z < k) = 0.6985$ ។ តាមតារាងយើងបាន $k = 0.52$ ។

ខ)ដោយ $P(k < Z < -0.18)$ នោះផ្ទៃក្រឡានៅខាងឆ្វេង k គឺ

$$P(Z < k) = 0.4286 - 0.4197 = 0.0089$$

នៅយើងបាន $k = -2.37$ ។

ឧទាហរណ៍៤.៤ សន្មត X ជាអថេរចៃដន្យន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យម $\mu = 50$ និងវ៉ារ្យ៉ង់ $\sigma = 10$ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែល X នៅក្នុងចន្លោះ45 និង 62។

ដំណោះស្រាយ

តម្លៃz ដែលត្រូវគ្នានឹង $x_1 = 45$ និង $x_2 = 62$ គឺ

$$z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5 \text{ និង } z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{aligned} P(45 < X < 62) &= P(-0.5 < Z < 1.2) \\ &= P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) \\ &= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764 \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍៤.៥ សន្មត X ជាអថេរចៃដន្យន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យម $\mu = 300$ និងវ៉ារ្យ៉ង់ $\sigma = 50$ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែល X កំណត់យកតម្លៃធំជាង362.

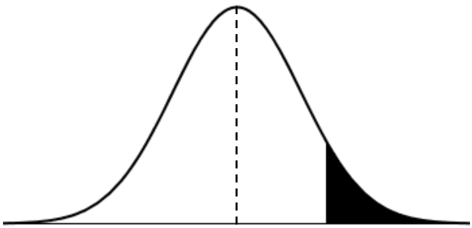
ដំណោះស្រាយ

តម្លៃz ដែលត្រូវគ្នានឹង $x = 362$ គឺ

$$z = \frac{362-300}{50} = 1.24$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$P(X > 362) = P(Z > 1.24) = 1 - P(Z < 1.24)$$
$$= 1 - 0.8925 = 0.1075$$



រូប៤-៤៖ ផ្ទៃក្រឡាសម្រាប់ឧទាហរណ៍៤.៥

ឧទាហរណ៍៤.៦ គេមានបំណែងចែកន័រម៉ាល់ ដែល $\mu = 40$ និង $\sigma = 6$ រកតម្លៃ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ក)នៅខាងឆ្វេងវា ផ្ទៃក្រឡាស្មើ45%។

ខ) នៅខាងស្តាំវា មានផ្ទៃក្រឡា14%។

ដំណោះស្រាយ

ក)ផ្ទៃក្រឡាទំហំ0.45 ស្ថិតនៅខាងឆ្វេងតម្លៃ x ដែលយើងចង់រក(រូប ៤-៥)។ យើងត្រូវរក z ដែលនៅខាងឆ្វេងវា មានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង0.45។ តាមតារាងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដារ យើងបាន

$P(Z < -0.13) = 0.45$ ដូច្នេះ $z = -0.13$ ។ នោះយើងបាន

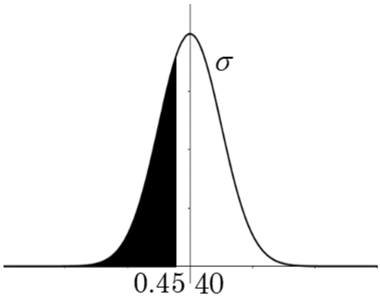
$x = (6)(-0.13) + 40 = 39.22$

ខ) តម្លៃ x ដែលត្រូវរកមានផ្ទៃក្រឡានៃខាងស្តាំវាមានទំហំ 0.14។ យើងត្រូវការតម្លៃ z ដែលនៅខាងស្តាំវាមានទំហំ0.14 ដូច្នេះ នៅខាងឆ្វេងវា ផ្ទៃក្រឡាមានទំហំ0.86។ ដោយប្រើតារាងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេន័រម៉ាល់ស្តង់ដា យើងបាន

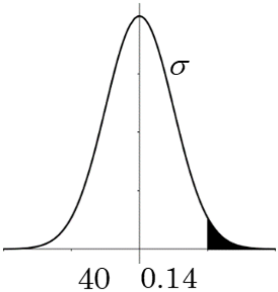
$$P(Z < 1.08) = 0.86$$

ដូច្នេះតម្លៃ z ដែលយើងត្រូវការគឺ $z = 1.08$ ហើយ

$x = (6)(1.08) + 40 = 46.48$



រូប៤-៥៖សម្រាប់ឧទាហរណ៍៤.៦



រូប៤-៦៖ សម្រាប់ឧទាហរណ៍៦.៦ខ

ឧទាហរណ៍៤.៧ ជនិតាអគ្គិសនីមួយប្រភេទមានអាយុកាលប្រើប្រាស់ជាមធ្យម៣ឆ្នាំ ដែលមានគម្លាតស្តង់ដាស្មើនឹង0.5 ឆ្នាំ។ សន្មតថាអាយុកាលប្រើ

ប្រាស់ គោរពតាមបំណែងចែកន័រម៉ាល់។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលជនិតាអគ្គិសនីមួយ អាចមានអាយុកាលប្រើប្រាស់តិចជាង2.3ឆ្នាំ។

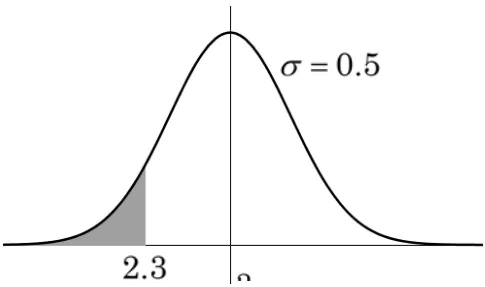
ដំណោះស្រាយ

តាង X ជាអថេរចៃដន្យអាយុកាលប្រើប្រាស់របស់ជនិតាអគ្គិសនី(គិតជាឆ្នាំ) នោះយើងត្រូវរក $P\left(X<2.3\right)$ (រូប៤.៦)។ បញ្ហានេះត្រូវគ្នានឹងការរកផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅខាងឆ្វេង z ដែល

$$z=\frac{2.3-3}{0.5}=-1.4$$

យើងបាន

$$P\left(X<2.3\right)=P\left(Z<-1.4\right)=0.0808$$



រូប៤.៦៖ ផ្ទៃក្រឡាសម្រាប់ឧទាហរណ៍៤.៧

ឧទាហរណ៍៤.៨ គេដឹងថាអាយុកាលប្រើប្រាស់របស់អំពូលភ្លើងដែលផលិតដោយក្រុមហ៊ុនមួយមានបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើ800ម៉ោង និងគម្លាតស្តង់ដាស្មើ40ម៉ោង។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអំពូលភ្លើងមួយអាចប្រើប្រាស់បានក្នុងរយៈពេលពី778ម៉ោងទៅ834ម៉ោង។

ដំណោះស្រាយ

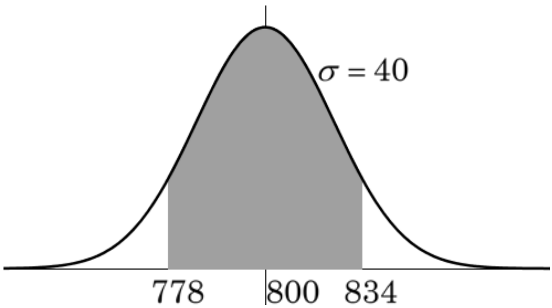
តាងអថេរ X ជាអាយុកាលប្រើប្រាស់របស់អំពូលភ្លើង (គិតជាម៉ោង) នោះអ្វីដែលយើងត្រូវរកគឺ $P(778 < X < 834)$ ។ តម្លៃ z ដែលត្រូវគ្នានឹង $x_1 = 778$ និង $x_2 = 834$ គឺ

$$z_1 = \frac{778-800}{40} = -0.55$$

$$z_2 = \frac{834-800}{40} = 0.85$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} P(778 < X < 834) &= P(-0.55 < Z < 0.85) \\ &= P(Z < 0.85) - P(Z < -0.55) \\ &= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111 \end{aligned}$$



រូប៤.៧៖ ផ្ទៃក្រឡាសម្រាប់ឧទាហរណ៍៤.៨

ឧទាហរណ៍៤.៩ នៅក្នុងផលិតកម្មមួយ អង្កត់ផ្ចិតរបស់បាដាង ជារង្វាស់ដែលត្រូវយកចិត្តទុកដាក់បំផុត។ អតិថិជនកំណត់ថារង្វាស់ដែលពួកគេត្រូវការគឺ 3.0 ± 0.01។ ដូច្នេះគ្មានបាដាងណាដែលមានប្រវែងអង្កត់ផ្ចិតស្ថិតនៅក្រៅចន្លោះនេះត្រូវគេទទួលយកឡើយ។ គេដឹងថា នៅក្នុងដំណើរការផលិត អង្កត់ផ្ចិតរបស់បាដាងមានបំណែងចែកន័រម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើ3 cmនិងគម្លាតស្តង់ដាស្មើ0.005cm។ ជាមធ្យម តើមានបាដាងដែលផលិតមកចំនួនប៉ុន្មានភាគរយ ដែលមិនត្រូវបានគេទទួលយក?

រូប៤.៨៖ បាដាង

ដំណោះស្រាយ

ប្រវែងអង្កត់ផ្ចិតរបស់បាដាងស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះពី $x_1 = 3.0 - 0.01 = 2.99$ cm និង $x_2 = 3.0 + 0.01 = 3.01$ cm។ តម្លៃ z ដែលត្រូវគ្នានឹងប្រវែងខាងលើគឺ៖

$$z_1 = \frac{2.99 - 3.0}{0.005} = -2.0$$

$$z_2 = \frac{3.01 - 3.0}{0.005} = +2.0$$

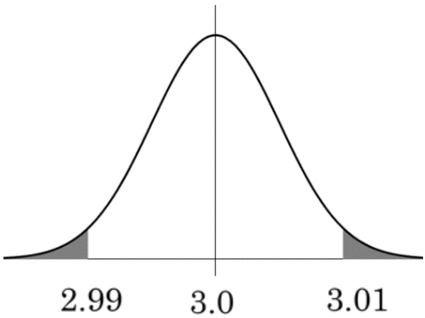
ដូច្នេះ

$$P(2.99 < X < 3.01) = P(-2.01 < Z < 2.0)$$

ដោយ $P(Z < -2.0) = 0.0228$ (តាមតារាងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេន័រម៉ាល់ស្តង់ដា) នោះផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ដែលស្ថិតនៅក្រៅចន្លោះគឺ

$$P(Z < -2.0) + P(Z > 2.0) = 2 \times 0.0228 = 0.0456$$

ដូច្នេះ ជាលទ្ធផល គឺថា 4.56%នៃបាដាងដែលផលិតមក នឹងមិនត្រូវបានគេ ទទួលយកទេ។



រូប៤.៩៖ ផ្ទៃក្រឡាសម្រាប់ឧទាហរណ៍៦.៩

ឧទាហរណ៍៤.១០ ម៉ាស៊ីនមួយប្រភេទផលិតរ៉េស៊ីស្ទ័រដែលមានរ៉េស៊ីស្តង់ មធ្យម 40អូម និងម្លាតស្តង់ដា2អូម។ សន្មតថារ៉េស៊ីស្តង់គោរពតាមបំណែង ចែកន័រម៉ាល់នោះចូររកភាគរយនៃរ៉េស៊ីស្ទ័រដែលមានរ៉េស៊ីស្តង់លើសពី43អូម។

ដំណោះស្រាយ

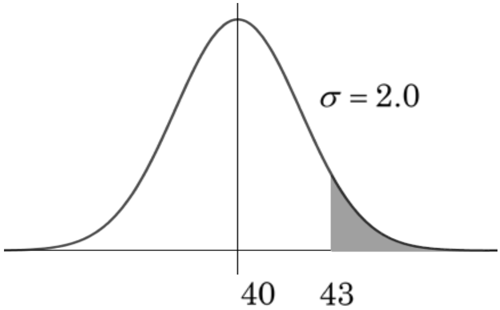
តម្លៃ z ដែលត្រូវនឹង $x = 43$ គឺ

$$z = \frac{43-40}{2} = 1.5$$

ដូច្នេះ

$$P(X > 43) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

ដូច្នេះយើងបាន 6.68%នៃរ៉េស៊ីស្តង់លើសពី43អូម។



រូប៤.១០៖ ផ្ទៃក្រឡាសម្រាប់ឧទាហរណ៍៦.១០

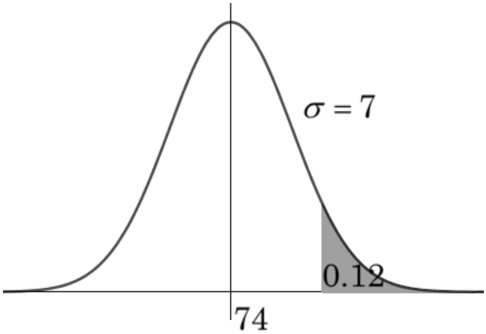
ឧទាហរណ៍៤.១១ ពិន្ទុមធ្យមនៅក្នុងការប្រឡងមួយគឺ 74 គម្លាតស្តង់ដាស្មើនឹង7។ ពិន្ទុមានបំណែងចែកន័រម៉ាល់។ បើសិនជាគេចង់ផ្តល់និទ្ទេសA ដល់សិស្សចំនួន១២% នោះចូរកេតម្លៃតូចបំផុតនៃពិន្ទុ ដែលបែងចែកនិទ្ទេសAនិង B។

ដំណោះស្រាយ

ផ្ទៃក្រឡាទំហំ0.12 ដែលត្រូវនឹងសមាមាត្រនៃចំនួនសិស្សដែលទទួលបាននិទ្ទេសA ស្ថិតនៅកន្ទុយខាងស្តាំ(រូប៤.១១)។ យើងត្រូវការតម្លៃ z ផ្ទៃក្រឡានៅខាងស្តាំវា មានទំហំ0.12ឬនៅខាងស្តាំវាមានទំហំ0.88។ តាមតារាងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា $P(Z<1.18)$មានតម្លៃជិតបំផុតទៅនឹង0.88។ ដូច្នេះ កំណត់យក $z=1.18$ ។ យើងបាន

$x=\sigma z+\mu=7\times1.18+74=82.26$

ដូច្នេះពិន្ទុដែលបែងចែកនិទ្ទេសទាំងពីគឺ ៨២។



រូប៤.១១៖ ផ្ទៃក្រឡាសម្រាប់ឧទាហរណ៍៦.១១

៤.៤ ការប៉ាន់ប្រមាណបំណែងចែកទ្វេធាដោយបំណែងចែកន័រម៉ាល់ (Normal Approximation to Binomial)

នៅក្នុងផ្នែក៣.៤ យើងប្រើបំណែងចែកព័រសុង ដើម្បីប៉ាន់ប្រមាណបំណែងចែកទ្វេធានៅពេលដែលnធំ ហើយ p ខិតទៅរកតម្លៃ0ឬ1។ បំណែងចែកទាំងពីរនេះ សុទ្ធតែជាបំណែងចែកដាច់។ នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងប្រើបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលជាបំណែងចែកជាប់ដើម្បីប៉ាន់ប្រមាណបំណែងចែកទ្វេធា។

បើសិនជា X តាងឱ្យអថេរចៃដន្យទ្វេធា ដែលមានមធ្យម $\mu = np$ និងវ៉ារ្យ៉ង់ $\sigma^2 = npq$ នោះបំណែងចែកអថេរ

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}, n \to \infty$$

គឺជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា។

ដើម្បីកាត់បន្ថយភាពល្អៀងនៅក្នុងការប៉ាន់ប្រមាណ«កំណែតម្រូវភាពជាប់» ត្រូវយកមកអនុវត្ត។ នៅក្នុងកំណែតម្រូវភាពជាប់នេះ តម្លៃ0.5ត្រូវបូកឬ

ដកចេញពីតម្លៃអថេរចៃដន្យដាច់ទៅតាមប្រភេទនៃចំណោទ។ តារាង១.១ បង្ហាញពីរបៀបប្រើប្រាស់កំណែតម្រូវភាពជាប់។

តារាង៤.១៖ កំណែតម្រូវភាពជាប់

ចំណោទក្នុងបំណែងចែកទ្វេធា	ការប៉ាន់ប្រមាណដោយបំណែងចែកន័រម៉ាល់
$P(X<x)$	$P(X<x-0.5)$
$P(X\le x)$	$P(X<x+0.5)$
$P(X>x)$	$P(X>x+0.5)$
$P(X\ge x)$	$P(X>x-0.5)$
$P(X=x)$	$P(x-0.5<X<x+0.5)$

សំណួរមួយដែលចោទឡើងនៅក្នុងការប្រើបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដើម្បីប៉ាន់ប្រមាណបំណែងចែកទ្វេធាគឺថា៖ «តើ n មានតម្លៃធំប៉ុនណា ទើបអាចប្រើការប៉ាន់ប្រមាណនេះបាន ?» ចម្លើយគឺថានៅពេលលក្ខខណ្ឌ $np\ge 5$ និង $n(1-p)\ge 5$ ត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់។

ឧទាហរណ៍៤.១២ វិញ្ញាសាប្រឡងមួយមានសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ)ចំនួន ក្នុងនោះសំណួរនីមួយៗមានចម្លើយដែលផ្តល់មកចំនួន៤ ហើយមានតែមួយនៅក្នុងចំណោមនោះដែលជាចម្លើយត្រឹមត្រូវ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលការទាយទាំងស្រុង ក្នុងការធ្វើវិញ្ញាសាប្រឡងនោះ បានចម្លើយត្រឹមត្រូវពី២៥ទៅ៣០សំណួរ ក្នុងចំណោម៨០សំណួរ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រូបាប៊ីលីតេនៃការទាយបានចម្លើយត្រូវ ចំពោះសំណួរនីមួយៗទាំង ៨០សំណួរនោះគឺ $p = 1/4 = 0.25$ ។ បើយើងតាង X ជាអថេរចៃដន្យនៃចំនួនសំណួរដែលត្រូវបានទាយចម្លើយបានត្រឹមត្រូវ នោះ

$$P(25 \le X \le 30) = \sum_{x=25}^{30} b(x;80,1/4)$$

យើងបាន

$$\mu = np = 80 \times (1/4) = 20$$

ហើយ

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \times (1/4) \times (3/4)} = 3.873$$

ដោយប្រើកំណែតម្រូវភាពជាប់ នោះយើងត្រូវរក

$$P(25 - 0.5 < X < 30 + 0.5) = P(24.5 < X < 30.5)$$

តម្លៃ z ដែលត្រូវគ្នានឹង $x_1 = 24.5$ គឺ

$$z_1 = \frac{24.5 - 20}{3.873} = 1.16$$

តម្លៃ z ដែលត្រូវគ្នានឹង $x_2 = 30.5$ គឺ

$$z_2 = \frac{30.5 - 20}{3.873} = 2.71$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{aligned} P(25 \le X \le 30) &= \sum_{x=25}^{30} b(x;80,1/4) \approx P(1.16 < Z < 2.71) \\ &= P(Z < 2.71) - P(Z < 1.16) \\ &= 0.9966 - 0.8770 = 0.1196 \end{aligned}$$

៤.៥ ទ្រឹស្តីបទលីមីត កណ្តាល (Central Limit Theorem)

លើសពីការយល់ដឹងអំពីថាតើតម្លៃនីមួយៗនៅក្នុងសំណុំទិន្នន័យប្រែប្រួលដូចម្តេចជុំវិញតម្លៃមធ្យមរបស់ស្ថិតិសាកល ស្ថិតិវិទូអាចនឹងផ្តោតទៅលើការសិក្សាមើលថាតើតម្លៃមធ្យមទាំងឡាយរបស់គំរូតាងដែលមានទំហំដូចៗគ្នានៅក្នុងស្ថិតិសាកលតែមួយ ប្រែប្រួលដូចម្តេចជុំវិញតម្លៃមធ្យមរបស់ស្ថិតិសាកលនោះ។

ឧបមាថាស្ថិតិវិទូជ្រើសរើសគំរូតាងស្ត្រីពេញវ័យចំនួន៣៥នាក់ហើយរកឃើញថាទម្ងន់មធ្យមស្មើនឹង 50.7 Kg។ គំរូតាងទីពីរ ត្រូវបានជ្រើសរើស ហើយរកឃើញមធ្យមនៃទម្ងន់ស្មើនឹង 48.9 Kg។ គំរូតាងត្រូវបន្តជ្រើសរើសរហូតដល់គ្រប់ចំនួន150។ អ្វីដែលទទួលបាននោះគឺថា មធ្យមនៃទម្ងន់របស់ស្ត្រីពេញវ័យនៅក្នុងការសិក្សានេះ គឺជាអថេរចៃដន្យដែលតម្លៃរបស់វាអាចស្មើ 50.7, 48.9, ..., 49.2 ហើយបង្កើតបានជាបំណែងចែកនៃមធ្យមរបស់គំរូតាង(sampling distribution of the sample means)។

ប្រសិនបើរាល់គំរូតាងទាំងអស់ដែលអាចមាន ត្រូវបានជ្រើសរើសឡើងតាមរបៀបដាក់ចូលទៅវិញ (selected with replacement)ចេញពីស្ថិតិសាកលមួយ នោះបំណែងចែកនៃមធ្យមរបស់គំរូតាងរបស់អថេរមួយ មានលក្ខណៈសំខាន់ពីរចំណុច៖

ក) មធ្យមនៃមធ្យមរបស់គំរូតាងទាំងអស់ស្មើនឹងមធ្យមរបស់ស្ថិតិសកល។

ខ) គម្លាតស្តង់ដានៃមធ្យមរបស់គំរូតាង តូចជាងគម្លាតស្តង់ដារបស់ស្ថិតិសាកល។ វាស្មើនឹងគម្លាតស្តង់ដារបស់ស្ថិតិសាកលចែកនឹងឫសការ៉េនៃទំហំគំរូតាង។

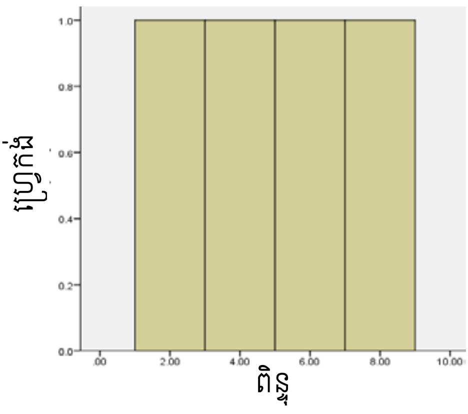
ដើម្បីឱ្យកាន់តែច្បាស់ យើងនឹងលើកយកឧទាហរណ៍មួយមកលាតត្រដាង។ ឧទាហរណ៍ថា ថ្នាក់រៀនតូចមួយមានសិស្សចំនួន៤នាក់ ហើយត្រូវបានចាត់ទុកជាស្ថិតិសាកលមួយ(a population)។ ពិន្ទុប្រឡង(ពិន្ទុពេញ ស្មើ8) មានដូចតទៅ៖ 2, 6, 4, 8។ ដូច្នេះមធ្យមរបស់ស្ថិតិសាកលកំណត់ដោយ

$$\mu = \frac{2+6+4+8}{4} = 5$$

ហើយគម្លាតស្តង់ដារបស់ស្ថិតិសាកលគឺ

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2 + (8-5)^2}{4}} \approx 2.236$$

ក្រាហ្វរបស់បំណែងចែកដើម ត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូប៤.១១។ បំណែងចែកនេះហៅថា បំណែងចែកឯកសណ្ឋាន។



រូប៤.១១៖ បំណែងចែកពិន្ទុ(ស្ថិតិសាកល)

បើសិនជាគំរូតាងដែលមានទំហំ២ត្រូវបានជ្រើសរើសតាមរបៀបដាក់ចូលទៅវិញ នោះយើងបាន បំណែងចែកដូចខាងក្រោម(តារាង៤.២)។

តារាង៤.២៖ គំរូតាងនិងមធ្យមរបស់វា

ល.រ	គំរូតាង	មធ្យម	ល.រ	គំរូតាង	មធ្យម
១	2, 2	2	៩	6, 2	4
២	2, 4	3	១០	6, 4	5
៣	2, 6	4	១១	6, 6	6
៤	2, 8	5	១២	6, 8	7
៥	4, 2	3	១៣	8, 2	5
៦	4, 4	4	១៤	8, 4	6
៧	4, 6	5	១៥	8, 6	7
៨	4, 8	6	១៦	8, 8	8

បំណែងចែកប្រេកង់នៃមធ្យមរបស់គំរូតាងមានបង្ហាញនៅក្នុងតារាង ៤.៣។ ហ៊ីស្តូក្រាមនៃបំណែងចែកប្រេកង់ក្នុងតារាង៤.៣ ត្រូវបានបង្ហាញក្នុង រូប៤.១២។ ហ៊ីស្តូក្រាមនេះ បានស្តែងចេញនូវភាពប្រហាក់ប្រហែលនរ័ម៉ាល់ របស់បំណែងចែក។

មធ្យមនៃមធ្យមរបស់គំរូតាងគឺ

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{2+3+\cdots+8}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

គម្លាតស្តង់ដានៃមធ្យមរបស់គំរូតាងគឺ

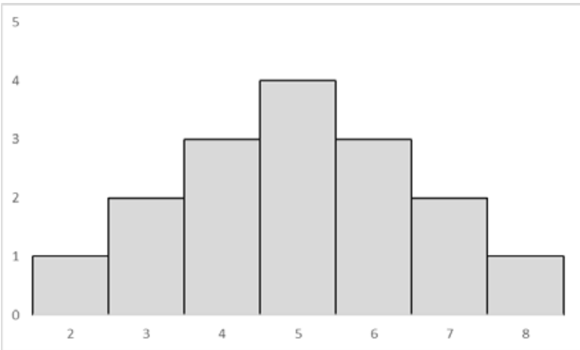
$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{(2-5)^2+(3-5)^2+\cdots+(8-5)^2}{16}} \approx 1.581$$

ដែលត្រូវគ្នានឹងគម្លាតស្តង់ដារបស់ស្ថិតិសាកល ចែកនឹង $\sqrt{2}$ ពោលគឺ

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{2.236}{\sqrt{2}} \approx 1.581$$

តារាង៤.៣៖ បំណែងចែកហ្រេ្វកង់នៃមធ្យមគំរូតាង

$\bar{X}$	ហ្រេ្វកង់
2	1
3	2
4	3
5	4
6	3
7	2
8	1



រូប៤.១២៖ ហ៊ីស្តូក្រាមនៃបំណែងចែករបស់មធ្យមនៃគំរូតាង

សង្ខេបមកវិញយើងអាចនិយាយថា បើគ្រប់គំរូតាងទំហំ n ទាំងអស់ដែលអាចមាន ត្រូវជ្រើសរើសចេញដោយមិនដាក់ចូលទៅវិញពីស្ថិតិសាកលតែមួយ នោះ

មធ្យមនៃមធ្យមរបស់គំរូតាងដែលតាងដោយ $\mu_{\bar{X}}$ ស្មើនឹងមធ្យមរបស់ស្ថិតិសាកល μ ($\mu_{\bar{X}} = \mu$) រីឯ**គម្លាតស្តង់ដានៃមធ្យមរបស់គំរូតាង** ដែលតាងដោយ $\sigma_{\bar{X}}$ ស្មើនឹងគម្លាតស្តង់ដារបស់ស្ថិតិសាកលចែកនឹងឫសការេនៃទំហំគំរូតាង($\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$)។ គម្លាតស្តង់ដានៃមធ្យមរបស់គំរូតាង ហៅថាភាពល្អៀងស្តង់ដានៃមធ្យម(standard error of the mean)។ ដូច្នេះនៅពេលទំហំគំរូតាង n មានការកើនឡើង(ដោយមិនកំណត់) នោះទ្រង់ទ្រាយនៃបំណែងចែករបស់មធ្យមគំរូតាងដែលត្រូវជ្រើសរើសឡើងតាមរបៀបមិនដាក់ចូលទៅវិញពីស្ថិតិសាកលមួយ ដែលមានមធ្យម μ និងគម្លាតស្តង់ដា σ នឹងខិតទៅរកភាពជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ ហើយ $\mu_{\bar{X}} = \mu$ និង $\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$ ។ យើងបានរូបមន្ត

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

ដែល $\bar{X}$ គឺជាមធ្យមរបស់គំរូតាង។

ចំណុចពីរសំខាន់ដែលត្រូវកត់សម្គាល់នៅពេលប្រើទ្រឹស្តីបទលីមីតកណ្តាលគឺ៖

១) នៅពេលដែលអថេរដើមគោរពតាមបំណែងចែកន័រម៉ាល់ នោះបំណែងចែកមធ្យមនៃគំរូតាង ក៏នឹងគោរពតាមបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែរដោយមិនប្រកាន់ទំហំរបស់គំរូតាងទេ។

២) នៅពេលដែលបំណែងចែករបស់អថេរដើម មិនន័រម៉ាល់នោះទំហំគំរូតាងតម្រូវឱ្យមានទំហំចាប់ពី៣០ឡើងទៅដើម្បីគេអាចប្រើបំណែងចែកន័រម៉ាល់បាន។

ដូច្នេះទ្រឹស្តីបទលីមីតកណ្តាល អាចសង្ខេបមកបីចំណុច៖

បើសិនជាទំហំគំរូតាងធំគ្រប់គ្រាន់ នោះ៖ មធ្យមគំរូតាង $\bar{X}$ គោរពតាមបំណែងចែកប្រហែលប្រហែលន័រម៉ាល់ មធ្យមនៃបំណែងចែកគឺ $\mu_{\bar{X}} = \mu$ ហើយវ៉ារ្យ៉ង់គឺ $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2 / n$ ។ គេអាចសរសេរ

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2 / n\right)$ ពេល $n \to \infty$

ឬ $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ពេល $n \to \infty$

ឧទាហរណ៍៤.១៣ រយៈពេលមធ្យមដែលកម្មករធ្វើការនៅចុងសប្តាហ៍គឺ7.93ម៉ោង(ក្នុងរយៈពេល២ថ្ងៃ)សន្មតថា បំណែងចែកនេះគោរពតាមបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលមានគម្លាតស្តង់ដាស្មើនឹង0.8ម៉ោង។

ក)រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលកម្មករណាម្នាក់ធ្វើការតិចជាង៨ម៉ោងនៅចុងសប្តាហ៍។

ខ) គំរូតាងកម្មករចំនួន៤០នាក់ត្រូវបានជ្រើសរើស។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលមធ្យមរបស់គំរូតាង តូចជាង៨ម៉ោង។

ដំណោះស្រាយ

ក) តាង X ជាចំនួនម៉ោងធ្វើការរបស់កម្មករនៅចុងសប្តាហ៍ នោះយើងត្រូវរក $P(X < 8)$ ។

$$P(X < 8) = P\left(Z < \frac{8 - 7.93}{0.8} \approx 0.09\right)$$

តាមតារាងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា ផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅខាងឆ្វេង $z = 0.09$ គឺ 0.5359 ។

ដូច្នេះ $P(X < 8) = P(Z < 0.09) = 0.5359$ ឬ 53.59% ។

ខ) យើងត្រូវរក $P\left(\bar{X} < 8\right)$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទលីមីតកណ្តាល យើងបាន

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{8 - 7.93}{0.8 / \sqrt{40}} = 0.7088 \text{ ឬ } 70.88\%$$

រូបមន្តភាពល្អៀងស្តង់ដានៃមធ្យម($\sigma / \sqrt{n}$)មានភាពត្រឹមត្រូវនៅពេលដែលគំរូតាងធ្វើឡើងតាមរបៀបដាក់ចូលទៅវិញ ឬបើសិនជាមិនដាក់ចូលទៅវិញទេនោះវាតម្រូវឱ្យស្ថិតិសាកលមានទំហំធំឬរាប់មិនអស់។ ដោយហេតុថានៅក្នុងការអនុវត្ត ការជ្រើសរើសគំរូតាងតាមរបៀបដាក់ចូលទៅវិញ ច្រើនតែមិនត្រូវបានធ្វើ នោះ*កត្តាកំណែតម្រូវស្ថិតិសាកលរាប់អស់* (Finite Population correction Factor) ត្រូវបានយកមកប្រើប្រាស់ ដើម្បីកាត់បន្ថយភាពល្អៀង។ កត្តាកំណែតម្រូវស្ថិតិសាកលរាប់អស់ គឺជាកន្សោម

$$\sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

ដែល N ជាទំហំស្ថិតិសាកល និង n ជាទំហំគំរូតាង។ បើតាមទម្លាប់អនុវត្តកន្លងមក នៅពេលដែលទំហំគំរូតាងធំជាង៥% នៃទំហំស្ថិតិសាកល នោះគេប្រើកត្តាកំណែតម្រូវនេះ។ ក្នុងករណីនេះ ភាពល្អៀងស្តង់ដានៃមធ្យមត្រូវកំណត់ដោយ

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

នាំឱ្យរូបមន្តសម្រាប់រកតម្លៃ z ទៅជា

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}}$$

សង្ខេបមក នៅក្នុងជំពូកនេះយើងបានសិក្សាអំពីបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យដាប់ចំនួនពីរប្រភេទគឺបំណែងចែកឯកសណ្ឋានដាប់និង

បំណែងចែកន័រម៉ាល់។ អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៃបំណែងចែកឯកសណ្ឋានជាអនុគមន៍ថេរ។ អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេនៃបំណែងចែកន័រម៉ាល់មានខ្សែកោងរាងជួងដែលអាស្រ័យលើប៉ារ៉ាម៉ែត្រ μ និង σ។ បំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដាជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យម0 និងគម្លាតស្តង់ដាស្មើ១។ នៅក្នុងជំពូកនេះដែរក៏មានការសិក្សាអំពីការប៉ាន់ប្រមាណបំណែងចែកទ្វេធាដោយប្រើបំណែងចែកន័រម៉ាល់ និងចុងក្រោយគឺទ្រឹស្តីបទលីមីតកណ្តាលនិងការគណនាប្រូបាប៊ីលីតេទាក់ទងនឹងមធ្យមគំរូតាង។

ឯកសារពិគ្រោះ

Hayter, A. (2012). Probability and statistics for engineers and scientists. Nelson Education.

Larsen, R. J., & Marx, M. L. (1986). An introduction to mathematical statistics and its applications (Vol. 2). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Lipschutz, S., & Schiller, J. J. (1998). Schaum's Outline of Introduction to Probability and Statistics. McGraw Hill Professional.

Ramachandran, K. M. and C. P. Tsokos (2009). Mathematical Statistics with Applications, Elsevier Inc.

Ross, S. M. (2004). Introduction to probability and statistics for engineers and scientists. Elsevier.

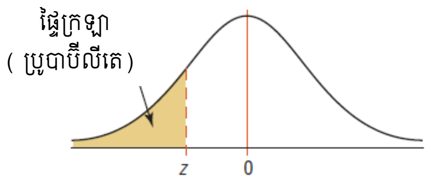
Triola, M. F. (2014). Elementary Statistics, Pearson.

Walpole, Ronald E., Raymond H. Myers, Sharon L. Myers, and Keying Ye. Probability and statistics for engineers and scientists. London: Pearson, 2014.

បំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដាកើន(ផ្នែកខាងឆ្វេង)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

សម្គាល់៖ ចំពោះតម្លៃzដែលតូចជាង -3.49 តម្លៃប្រូបាប៊ីលីតេត្រូវកំណត់យកត្រឹម0.0001



បំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដាកើន(ផ្នែកខាងស្តាំ)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

សម្គាល់៖ ចំពោះតម្លៃzដែលធំជាង 3.49 តម្លៃប្រូបាប៊ីលីតេត្រូវកំណត់យកត្រឹម0.9999