ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

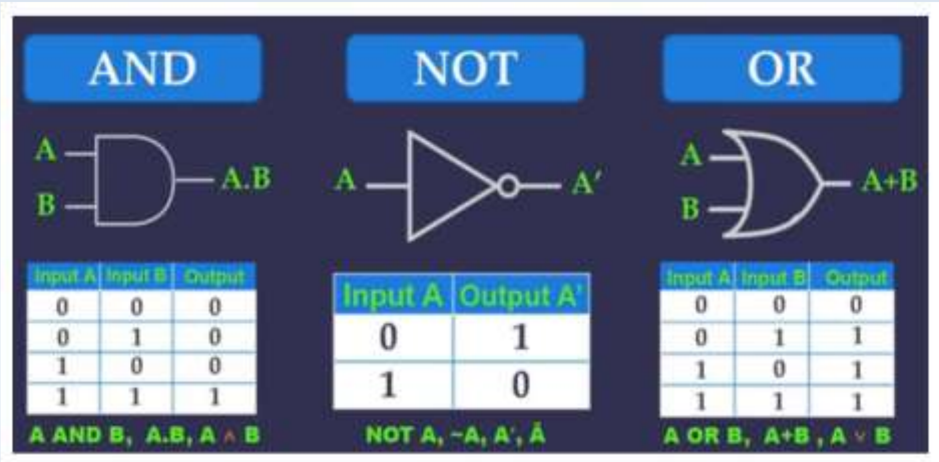
រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា

នាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

តក្កវិទ្យាជាមួយការអនុវត្ត

Logic with Applications



យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ឆ្នាំ ២០២២

តក្កវិទ្យាជាមួយការអនុវត្ត

Logic with Applications

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

នាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ
វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា

ឆ្នាំ ២០២២

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **តក្កវិទ្យាជាមួយការអនុវត្ត** រៀបចំសម្រាប់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ អ្នកសិក្សា និង អ្នកស្រាវជ្រាវលើវិស័យគណិតវិទ្យា។ សៀវភៅនេះ ជាផ្នែកមួយនៃពីជគណិត ដែលផ្តល់ឱ្យនិស្សិតត្រូវសិក្សាទទួលបានចំណេះដឹងខាងទ្រឹស្តី និង ការអនុវត្តដែលជាមូលដ្ឋាននៃការវិភាគតាមបែបតក្កវិទ្យា និង ភាពសមហេតុផល ដោយសមស្របតាមកម្មវិធីក្នុងស្រុកនឹងស៊ីសង្វាក់ជាមួយកម្មវិធីសិក្សាក្នុងប្រទេសជឿនលឿនមួយចំនួន។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា ក្រោយពីការសិក្សារៀនសូត្រ និង វិភាគដោយយកចិត្តទុកដាក់នោះ និស្សិតពិតជាទទួលបានចំណេះដឹងគណិតវិទ្យាផ្នែកតក្កវិទ្យានិងការអនុវត្តបានយ៉ាងទូលំទូលាយសមប្រកបតាមលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ ។

ក្នុងសៀវភៅ **តក្កវិទ្យាជាមួយការអនុវត្ត** នេះមាន ៤ ជំពូក។ ជំពូកទី១សិក្សាអំពី តក្កវិទ្យា ជំពូកទី២ សិក្សាអំពី ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងការសម្រាយបំភ្លឺ ជំពូកទី៣សិក្សាអំពី ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងទ្រឹស្តីសំណុំ និង ជំពូកទី៤សិក្សាអំពី ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងសៀគ្វីតក្កៈឌីជីថល ។

ក្នុងជំពូកនីមួយៗនៃសៀវភៅនេះ មានមេរៀនខ្លះជាការសង្ខេប រំឭកឡើងវិញនូវចំណេះដឹងមួយចំនួនដែលនិស្សិតបានសិក្សារួចនៅថ្នាក់ក្រោម មេរៀនខ្លះទៀតមានការបង្ហាញនិយមន័យ ការស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ រូបមន្ត លក្ខណៈ និង ផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ មានសិក្សាជាឧទាហរណ៍មួយចំនួនដោយមានភ្ជាប់នឹងចម្លើយ លំហាត់ប្រតិបត្តិ ហើយចុងបញ្ចប់ជំពូកបីក្នុងចំណោមជំពូកទាំងបួនមានលំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ សម្រាប់ឱ្យសិស្ស និង និស្សិតអាននិងរៀនហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយតាម។

ដូច្នេះសៀវភៅនេះ នឹងជាជំនួយដល់សិស្ស និង និស្សិត ដែលកំពុងសិក្សានៅ វិទ្យាល័យ វិទ្យាស្ថាន សាកលវិទ្យាល័យនានា ក៏ដូចជាលោកគ្រូ និង អ្នកគ្រូ ដែលកំពុងបង្រៀនមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា នៅក្នុងប្រទេសផងដែរ ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងបរិការណ៍អប់រំសតវត្សរ៍ទី២១។

ភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី១៥ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០២២

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះលោកឪពុក អ្នកម្តាយដែលលោកបានបីបាច់ ថែរក្សាអប់រំទូន្មានប្រៀនប្រដៅរូបយើងខ្ញុំប្រកបដោយគន្លងធម៌ទាំងចិត្តទាំងកាយតាំងពីកុមារភាពរហូតមកដល់សព្វថ្ងៃនេះ។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និង សាស្ត្រាចារ្យដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនខ្ញុំតាំងពីមត្តេយ្យសិក្សារហូតដល់ឧត្តមសិក្សា ព្រមទាំងបានផ្តល់នូវការអប់រំទូន្មាន និង ដំបូន្មានល្អៗដល់ខ្ញុំឱ្យមានការតស៊ូ ព្យាយាម ប្រកបដោយស្មារតីមនសិការនិងការខិតខំប្រឹងប្រែងរៀនសូត្ររហូតទទួលបានជោគជ័យក្នុងការសិក្សា និង ការងារ។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណដ៏ជ្រាលជ្រៅចំពោះឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **សុខ ទូច** ជាប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ដែលបានផ្តល់ឱកាស និង ជួយគាំទ្រសម្រាប់ស្នាដៃរបស់ខ្ញុំបាទ។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះឯកឧត្តមបណ្ឌិត **អ៊ាច មុន្នីណា** ជាប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យា ដែលបានជំរុញការស្រាវជ្រាវ និង ជួយគាំទ្រសម្រាប់ស្នាដៃរបស់ខ្ញុំបាទ។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ សាស្ត្រាចារ្យ អនុបណ្ឌិត បណ្ឌិត និង ទស្សនវិទូទាំងឡាយដែលបានខិតខំរិះរកនូវប្រធានបទនៃរបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវ សារណា ឬ និក្ខេបបទនានា ហើយបានចងក្រងជាសៀវភៅដែលទាក់ទងនឹងគណិតវិទ្យា សម្រាប់ផ្តល់ចំណេះដឹងតាមរយៈការអានដល់កូនចៅជំនាន់ក្រោយៗទៀត។

មាតិកា

ទំព័រ

ជំពូកទី ១
តក្កវិទ្យា
Logic

ជំពូកទី ២
ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងការសម្រាយបំភ្លឺ
Using Logic for Proofs

ជំពូកទី ៣
ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងទ្រឹស្តីសំណុំ
Using Logic for Set Theory

ជំពូកទី ៤
ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងសៀគ្វីតក្កៈឌីជីថល
Using Logic in Digital Logic Circuits

ជំពូកទី ១

តក្កវិទ្យា

Logic

នៅក្នុងជំពូកទី១នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីបញ្ញត្តិមូលដ្ឋាននៃតក្កវិទ្យា ដូចជាការសិក្សាអំពីបកាសន៍ តារាងភាពពិត ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា វិចារ បរិមាណករ និង លក្ខណៈរបស់វាដូចតទៅៈ

១.១ បកាសន៍ និង តារាងភាពពិត

១.១.១ បកាសន៍

ក្នុងការពិភាក្សាគ្នា យើងតែងសង្កេតឃើញថា មានការលើកឡើងនូវអំណះអំណាងផ្សេងៗគ្នា ដែលអំណះអំណាងខ្លះពិត ខ្លះមិនពិត នៅពេលដែលយើងដឹង និង អំណះអំណាងខ្លះទៀតមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន នៅពេលដែលយើងមិនដឹង។ ជាឧទាហរណ៍ << 16 ជាចំនួនគត់សេស >> ជាអំណះអំណាងមួយ។ វាជាអំណះអំណាងមិនពិត នោះគេអាចហៅវាថាជា បកាសន៍ ។

និយមន័យ ឃ្លា ប្រយោគ អំណះអំណាងទាំងឡាយណាដែលគេសម្រេចបានថា ឬមួយពិត ឬមួយវាមិនពិត ហៅថា **បកាសន៍** ។[១] ភាពពិត ឬ មិនពិតនៃបកាសន៍ ហៅថា **តម្លៃភាពពិត** ឬ **តម្លៃតក្កវិទ្យា**នៃបកាសន៍នោះ។

សម្គាល់

ក្រុមប្រឹក្សាជាតិភាសាខ្មែរបានអនុម័តពាក្យ << បកាសន៍ >> (Proposition/Statement) រួចហើយដែលពីមុនពាក្យនេះបានប្រើជា សំណើ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអំណះអំណាងខាងក្រោមនេះ

ក. << $7+8 \geq 12$ >> ជាបកាសន៍មួយ (បកាសន៍ពិត)។

ខ. << 21 ជាចំនួនបឋម >> ជាបកាសន៍មិនពិត។

គ. << មេទា ជាសត្វមានស្លាប >> ជាបកាសន៍ពិត។

ឃ. << មេជ្រូក ជាសត្វមានស្លាប >> ជាបកាសន៍មិនពិត។

ង. << ផ្ទៃមានមាឌធំ >> ជាអំណះអំណាងមិនអាចថា ពិត ឬ មិនពិត ពីព្រោះគេមិនបានកំណត់ថាទំហំខ្លួនប៉ុនណាដែលបញ្ជាក់ថាមានមាឌធំនោះ។ ដូចនេះ វាមិនមែនជាបកាសន៍ទេ។

---

[១] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយនៃខេមរយានកម្មសិក្សា <<*គណិតវិទ្យាៈ ពីជគណិត*>> (ទីបញ្ចប់ ភាគ I) ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រពិសោធ ឆ្នាំ១៩៧៣។

ច. << កម្មករតវ៉ាប្រឆាំងថៅកែរោងចក្រនៅខេត្តព្រៃវែង >> ជាអំណះអំណាងមួយ ប៉ុន្តែវាមិនមែនជាបកាសន៍ទេ។

ឆ. << ថ្ងៃស្អែកមិនមានភ្លៀងទេនៅខេត្តព្រៃវែង >> ជាអំណះអំណាងមួយ ប៉ុន្តែវាមិនមែនជាបកាសន៍ទេ។ ប្រសិនបើ <<ថ្ងៃស្អែកមិនមានភ្លៀងទេនៅខេត្តព្រៃវែង>> ជាអំណះអំណាងមិនពិត។ នោះវាជាបកាសន៍។

សម្គាល់

ចំពោះប្រយោគ ឬ អំណះអំណាងខ្លះដែលមានទម្រង់សំណួរ ទម្រង់ឧទាន ឬ ទម្រង់ការស្នើសុំ មិនមែនជាបកាសន៍ទេ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអំណះអំណាងខាងក្រោមនេះ

ក. << តើបងប្រុសធ្វើដំណើរទៅទីណាដែរ? >> មិនមែនជាបកាសន៍ទេ។

ខ. << ផ្កាឈូកនេះល្អអ្វីម្លេះទេ! >> មិនមែនជាបកាសន៍ទេ។

គ. << សូមប្អូនបិទទ្វារឱ្យលោកគ្រូបន្តិចមក។ >> មិនមែនជាបកាសន៍ទេ។

គេតាងឈ្មោះនៃបកាសន៍ដោយអក្សរធំ P, Q, R, ... ក៏បាន ឬ អក្សរតូច p, q, r, ... ក៏បាន។ ជាធម្មតាគេសរសេរបកាសន៍តាមលំដាប់អក្សរ និង ហៅអក្សរទាំងនេះថាជាបកាសន៍ងាយ ឬ ជាអថេរ។

- បើបកាសន៍ q ពិត នោះយើងថា បកាសន៍ q មានតម្លៃភាពពិតឬតម្លៃតក្កវិទ្យាស្មើនឹង 1 ហើយយើងសរសេរ ត. (q) = 1 ។

- បើបកាសន៍ q មិនពិត នោះយើងថា បកាសន៍ q មានតម្លៃភាពពិតឬតម្លៃតក្កវិទ្យាស្មើនឹង 0 ហើយយើងសរសេរ ត. (q) = 0 ។

ឧទាហរណ៍ ចូរជ្រើសរើសអំណះអំណាងដែលជាបកាសន៍ក្នុងចំណោមអំណះអំណាងខាងក្រោម ហើយកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ទាំងនោះ។

ក. p : សត្វដំរីតូចជាងសត្វមាន់។

ខ. q : 2022 ចែកដាច់នឹង 2 ។

គ. r : តើសៀវភៅរបស់ខ្ញុំនៅទីណា?

ឃ. s : សត្វគោមានជើង៤ ។

ង. t : 2022 ចែកដាច់នឹង 5 ។

ច. u : សូមអ្នកអញ្ជើញចូលរួមកម្មវិធីបុណ្យផង។

ឆ. v : ចតុកោណមានជ្រុង៦ ។

ជ. w : ចតុកោណកែងមានមុំកែង៤ ។

ឈ. x : បញ្ចកោណមានជ្រុង៥ ។

ចម្លើយ

ក. អំណះអំណាង p ជាបកាសន៍មួយ និង ត. (p) = 0 ។
ខ. អំណះអំណាង q ជាបកាសន៍មួយ និង ត. (q) = 1 ។
គ. អំណះអំណាង r មិនមែនជាបកាសន៍ទេ។
ឃ. អំណះអំណាង s ជាបកាសន៍មួយ និង ត. (s) = 1 ។
ង. អំណះអំណាង t ជាបកាសន៍មួយ និង ត. (t) = 0 ។
ច. អំណះអំណាង u មិនមែនជាបកាសន៍ទេ។
ឆ. អំណះអំណាង v ជាបកាសន៍មួយ និង ត. (v) = 0 ។
ជ. អំណះអំណាង w ជាបកាសន៍មួយ និង ត. (w) = 1 ។
ឈ. អំណះអំណាង x ជាបកាសន៍មួយ និង ត. (x) = 5 ។

និយមន័យ ការផ្សំ (ឬ ភ្ជាប់) បកាសន៍ពីរឬច្រើន ដោយឈ្នាប់និង ($\wedge$) ឈ្នាប់ឬ ($\vee$) ឈ្នាប់នាំឱ្យ ($\rightarrow$) និង ឈ្នាប់សមមូល ($\leftrightarrow$) ជាបកាសន៍ថ្មីមួយ ហៅថា **បកាសន៍សមាស** (Compound Statements) ។

ឧទាហរណ៍

ក. បកាសន៍ « $17 \geq 6$ ឬ $17 = 3$ » ជាបកាសន៍សមាស។

ខ. តាងបកាសន៍ « ពូឡាយមានរថយន្តមួយ » ជាបកាសន៍ពិត និង តាង « ពូណាងមានផ្ទះវីឡាថ្មីមួយ » ជាបកាសន៍ពិត។ នោះបកាសន៍ « ពូឡាយមានរថយន្តមួយនិងពូណាងមានផ្ទះវីឡាថ្មីមួយ » ជាបកាសន៍សមាស។

ប្រតិបត្តិ ចូរជ្រើសរើសអំណះអំណាងដែលជាបកាសន៍ក្នុងចំណោមអំណះអំណាងខាងក្រោម ហើយកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ទាំងនោះ។

ក. p : សត្វគោធំជាងសត្វដំរី ។
ខ. q : 2021 ចែកដាច់នឹង 3 ។
គ. r : ថ្ងៃស្អែកនឹងមានភ្លៀងនៅខេត្តកំពង់ចាម ។
ឃ. s : សត្វក្របីមានជើង៧ ។
ង. t : ចតុកោណស្មើមានជ្រុង៥ ។

១.១.២ តារាងភាពពិត

ដើម្បីសិក្សាតម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ទាំងឡាយ យើងប្រើសញ្ញានិងតារាងភាពពិតដូចខាងក្រោម៖

តារាងភាពពិត

p
T ពិត
F មិនពិត

តារាងភាពពិត

p
1 ពិត
0 មិនពិត

ក្នុងនេះ p ជាបកាសន៍ឬអថេរណាមួយ។ យើងឃើញថា បកាសន៍ p នៃតារាងភាពពិតខាងលើមាន $2^1 = 2$ ករណីគឺ 1 (T ពិត) ឬ 0 (F មិនពិត) ។

ប្រសិនបើបកាសន៍សមាសមានពីរអថេរ p , q នោះតារាងភាពពិតមាន $2^2 = 4$ ករណីដូចខាងក្រោម៖

តារាងភាពពិត

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

ប្រសិនបើបកាសន៍សមាសមានបីអថេរ p , q , r នោះតារាងភាពពិតមាន $2^3 = 8$ ករណីដូចខាងក្រោម៖

តារាងភាពពិត

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

ជាទូទៅ ប្រសិនបើបកាសន៍សមាសមាន n អថេរ $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ នោះតារាងភាពពិតមាន 2^n ករណី។

១.២ ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

១.២.១ ឈ្នាប់និង

និយមន័យ បកាសន៍សមាសដែលកើតឡើងដោយការភ្ជាប់បកាសន៍ p ជាមួយបកាសន៍ q ដោយប្រើ « ឈ្នាប់និង $\wedge$ » ហៅថា **បកាសន៍ឈ្នាប់និង** នៃបកាសន៍ទាំងពីរ។ បកាសន៍សមាស « p និង q » តាងដោយ « $p \wedge q$ » ជាបកាសន៍មួយពិតតែក្នុងករណីដែល p និង q ជាបកាសន៍ពិតព្រមគ្នា។

តារាងភាពពិត

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p : << 48 ចែកដាច់នឹង 3 >> , q : << $19 > 15$ >> ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $p\wedge q$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

យើងមាន p ជាបកាសន៍ពិត និង q ក៏ជាបកាសន៍ពិតដែរ ។

យើងបាន $p\wedge q$: << 48 ចែកដាច់នឹង 3 និង $19 > 15$ >> ជាបកាសន៍ពិត ឬក៏ ត. $(p\wedge q) = 1$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ a : << ផែនដីមានរាងពងក្រពើ >> , b : << គោមានជើងមួយ >> ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $a\wedge b$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

យើងមាន ត. $(a) = 0$ និង ត. $(b) = 0$ ។

យើងបានបកាសន៍ $a\wedge b$: << ផែនដីមានរាងពងក្រពើ និង គោមានជើងមួយ >> និង ត. $(a\wedge b) = 0$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p : << 49 ចែកដាច់នឹង 9 >> , q : << $91 < 100$ >> ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $p\wedge q$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

២. គេមានបកាសន៍ពីរ a : << 63 ជាពហុគុណនៃ 7 >> , b : << 63 ជាចំនួនគត់គូ >> ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $a\wedge b$ និង ត. $(a\wedge b)$ ។

៣. គេមានបកាសន៍ពីរ c : << ចតុកោណកែងមានមុំស្រួច៤ >> , d : << ឆកោណមានជ្រុង៦ >> ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $c\wedge d$ និង ត. $(c\wedge d)$ ។

១.២.២ ឈ្នាប់ឬ

និយមន័យ បកាសន៍សមាសដែលកើតឡើងដោយការភ្ជាប់បកាសន៍ p ជាមួយបកាសន៍ q ដោយប្រើ << ឈ្នាប់ឬ $\vee$ >> ហៅថា **បកាសន៍ឈ្នាប់ឬ** នៃបកាសន៍ទាំងពីរ។ បកាសន៍សមាស << p ឬ q >> តាងដោយ << $p\vee q$ >> ជាបកាសន៍មួយមិនពិតតែក្នុងករណីដែល p និង q ជាបកាសន៍មិនពិតព្រមគ្នា។

តារាងភាពពិត

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p : << $48 > 33$ >> , q : << $19 = 15$ >> ។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $p\vee q$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ $p\vee q$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន p ជាបកាសន៍ពិត និង q ជាបកាសន៍មិនពិត។

យើងបាន $p\vee q$: << $48 > 33$ ឬ $19 = 15$ >> ជាបកាសន៍ពិត ឬក៏ ត. $(p\vee q) = 1$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ a : << មនុស្សមានដៃប្រាំពីរ >> , b : << មនុស្សមានភ្នែកប្រាំមួយ >> ។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $a\vee b$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ $a\vee b$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. $(a) = 0$ និង ត. $(b) = 0$ ។

យើងបានបកាសន៍ $a\vee b$: << មនុស្សមានដៃប្រាំពីរ ឬ មានភ្នែកប្រាំមួយ >> និង ត. $(a\vee b) = 0$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p : << 51 ចែកដាច់នឹង 3 >> , q : << $95 < 123$ >> ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $p\vee q$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

២. គេមានបកាសន៍ពីរ a : << 41 ជាពហុគុណនៃ 7 >> , b : << 41 ជាចំនួនគត់សេស >>។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $a\vee b$ និង ត. $(a\vee b)$ ។

៣. គេមានបកាសន៍ពីរ c : << គ្រប់ការេ ជាចតុកោណកែង >> , d : << ត្រីកោណមានជ្រុង២ >> ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $c\vee d$ និង ត. $(c\vee d)$ ។

១.២.៣ ឈ្នាប់មិន

និយមន័យ ប្រយោគបដិសេធ ឬ បកាសន៍បដិសេធនៃបកាសន៍ p ណាមួយ ហៅថា **បកាសន៍ឈ្នាប់មិន** នៃបកាសន៍ p ។ គេកំណត់សរសេរ $\bar{p}$ ឬ $\neg p$ អានថា << មិន p >> ។

តារាងភាពពិត

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p : << ផែនដីវិលជុំវិញព្រះអង្គារ >> , q : << $19 \neq 15$ >> ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. $(p) = 0$ និង ត. $(q) = 1$ ។

យើងបាន $\bar{p}$ ជាបកាសន៍ << ផែនដីមិនវិលជុំវិញព្រះអង្គារទេ >> និង ត. $(\bar{p}) = 1$

ហើយ $\bar{q}$ ជាបកាសន៍ << $19 = 15$ >> និង ត. $(\bar{q}) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានបកាសន៍ a : 5 ជាតួចែកនៃ 55 , $b : 1^3 + 4^3 = (1+4)^3$,
$c : 1^3 + 4^3 \leq (1+4)^3$ និង $d : 5^3 < (1+3)^3$ ។
កំណត់បកាសន៍ឈ្នាប់មិន និង តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ឈ្នាប់មិនរបស់បកាសន៍ខាងលើ។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ឈ្នាប់មិន និង តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ឈ្នាប់មិន។

យើងបាន៖

$\neg a$: 5 មិនមែនជាតួចែកនៃ 55 ទេ និង ត. ($\neg a$) = 0

$\neg b$: $1^3 + 4^3 \neq (1+4)^3$ និង ត. ($\neg b$) = 1

$\neg c$: $1^3 + 4^3 > (1+4)^3$ និង ត. ($\neg c$) = 0

ហើយ $\neg d$: $5^3 \geq (1+3)^3$ និង ត. ($\neg d$) = 1 ។

ឧទាហរណ៍ គេមានបកាសន៍ p : ត្រីកោណមានជ្រុង៣។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{\bar{p}}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{\bar{p}}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. $(p) = 1$ ។

យើងបាន $\bar{p}$: ត្រីកោណមិនមានជ្រុង៣ទេ និង ត. $(\bar{p}) = 0$

ហើយ $\bar{\bar{p}}$: ត្រីកោណមានជ្រុង៣ និង ត. $(\bar{\bar{p}}) = 1$ ។

ជាទូទៅ បកាសន៍ p និង $\bar{\bar{p}}$ ជាបកាសន៍តែមួយ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ពីរ a : ខោខ្លីនេះផលិតដោយក្រុមហ៊ុនវឌ្ឍនៈ ជាបកាសន៍ពិត

និង b : ខោខ្លីនេះមានគុណភាពល្អ ជាបកាសន៍មិនពិត។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} \wedge \bar{b}$, $\bar{a} \vee \bar{b}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} \wedge \bar{b}$, $\bar{a} \vee \bar{b}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. $(a) = 1$ និង ត. $(b) = 0$ ។

យើងបាន៖

$\bar{a}$: ខោខ្លីនេះមិនបានផលិតដោយក្រុមហ៊ុនវឌ្ឍនៈទេ និង ត. $(\bar{a}) = 0$ ។

$\bar{b}$: ខោខ្លីនេះមិនមានគុណភាពល្អទេ និង ត. $(\bar{b}) = 1$ ។

$\bar{a} \wedge \bar{b}$: ខោខ្លីនេះមិនបានផលិតដោយក្រុមហ៊ុនវឌ្ឍនៈនិងមិនមានគុណភាពល្អទេ ហើយ ត. $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = 0$ ។

$\bar{a} \vee \bar{b}$: ខោខ្លីនេះមិនបានផលិតដោយក្រុមហ៊ុនវឌ្ឍនៈឬមិនមានគុណភាពល្អទេ ហើយ ត. $(\bar{a} \vee \bar{b}) = 1$ ។

យើងអាចបញ្ជាក់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $P(p, q, r, ...)$ ដោយតារាងភាពពិត ដែល $p, q, r, ...$ ជាបកាសន៍ ឬ អថេរ។

ឧទាហរណ៍ ចូរសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $\neg(\neg p \wedge q)$ តាមពីររបៀប។

ចម្លើយ

របៀបទី១

តារាងភាពពិត

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg(\neg p \wedge q)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

របៀបទី២ យើងអាចសង់តារាងភាពពិតតាមរបៀបទី២គឺ

p	q	$\neg$	$(\neg$	p	$\wedge$	$q)$
1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
ជំហាន		iv	ii	i	iii	i

យើងបានតម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $\neg(\neg p \wedge q)$ ជាតម្លៃភាពពិតក្នុងជួរឈរជំហានទី៤ ដែលជាជំហានចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិត។

ប្រតិបត្តិ

១. គេមានបកាសន៍ $a: 77$ ជាពហុគុណនៃ 7, $b: 1^3 + 3^3 = (1+3)^3$,
$c: 1^3 + 3^3 > (1+3)^3$ និង $d: 4^3 \le (1+2)^3$ ។
កំណត់បកាសន៍ឈ្នាប់មិន និង តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ឈ្នាប់មិនរបស់បកាសន៍ខាងលើ។

២. គេមានបកាសន៍ p : ត្រីកោណកែងមានមុំកែង២។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{\bar{p}}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

៣. គេឱ្យបកាសន៍ពីរ a : ខោវែងនេះផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញា ជាបកាសន៍មិនពិត
និង b : ខោវែងនេះមិនមានគុណភាពល្អទេ ជាបកាសន៍មិនពិតដែរ។
ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} \wedge \bar{b}$, $\bar{a} \vee \bar{b}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

១.២.៤ ឈ្នាប់នាំឱ្យ

និយមន័យ បកាសន៍ថ្មីមួយដែលភ្ជាប់បកាសន៍ p ជាមួយបកាសន៍ q ដោយប្រើ « ឈ្នាប់នាំឱ្យ ឬ ឈ្នាប់បណ្ដាល $\rightarrow$» ហៅថា **បកាសន៍ឈ្នាប់នាំឱ្យ** (ឬ **បកាសន៍ឈ្នាប់បណ្ដាលឬបកាសន៍លក្ខខណ្ឌ**)នៃបកាសន៍ទាំងពីរ។ បកាសន៍សមាស « បើ p នាំឱ្យ q ឬ បើ p នោះ q » តាងដោយ « $p \rightarrow q$ » ជាបកាសន៍មួយដែលមិនពិតតែក្នុងករណីដែល p ជាបកាសន៍ពិត និង q ជាបកាសន៍មិនពិត។

តារាងភាពពិត

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

សម្គាល់

១. បកាសន៍ p ជាបុព្វបកាសន៍ និង បកាសន៍ q ជាវិបាក។

២. អ្នកនិពន្ធខ្លះបានប្រើនិមិត្តសញ្ញា « $\Rightarrow$ » សម្រាប់ឈ្នាប់នាំឱ្យនេះ។

៣. បកាសន៍ $q \to p$ ហៅថា បកាសន៍ច្រាសនៃបកាសន៍ $p \to q$ ។

៤. ជាទូទៅបកាសន៍ $p \to q \neq q \to p$ ។

៥. បកាសន៍ $\bar{q} \to \bar{p}$ ហៅថា បកាសន៍ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ឬ បកាសន៍ផ្ទុយច្រាសនៃបកាសន៍ $p \to q$ ។

៦. បកាសន៍ $\bar{p} \to \bar{q}$ ហៅថា បកាសន៍ចម្រាសនៃបកាសន៍ $p \to q$ ។

៧. ឧបមាថា p និង q ជាបកាសន៍ ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $p \to q$ ។ នោះ q ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់សម្រាប់ p និង p ជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ q ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p : ភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជា , $q : 19 < 15$ ។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \to q$, $q \to p$, $\bar{p} \to \bar{q}$, $\bar{p} \to \bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \to q$, $q \to p$, $\bar{p} \to \bar{q}$, $\bar{p} \to \bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. $(p) = 1$ និង ត. $(q) = 0$ ។

យើងបាន៖

$\bar{p}$: ភ្នំពេញមិនមែនជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជាទេ និង ត. $(\bar{p}) = 0$ ។

$\bar{q}$: $19 \geq 15$ និង ត. $(\bar{q}) = 1$ ។

$p \to q$: បើភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជា នោះ $19 < 15$

ហើយ ត. $(p \to q) = 0$ ។

$q \to p$: បើ $19 < 15$ នោះភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជា

ហើយ ត. $(q \to p) = 1$ ។

$\bar{p} \to \bar{q}$: បើភ្នំពេញមិនមែនជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជាទេ នោះ $19 \geq 15$

ហើយ ត. $(\bar{p} \to \bar{q}) = 1$ ។

$\bar{q} \to \bar{p}$: បើ $19 \geq 15$ នោះភ្នំពេញមិនមែនជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជាទេ

ហើយ ត. $(\bar{q} \to \bar{p}) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានបកាសន៍ពីរគឺ p : សំណាងជានិស្សិតគណិតវិទ្យា

និង q : សំណាងរៀនពីជគណិតលីនេអ៊ែ។

ក. កំណត់បកាសន៍ $p \to q$, $q \to p$, $\bar{p} \to q$ និង $\bar{q} \to \bar{p}$ ។

ខ. សរសេរបកាសន៍ << បើសំណាងរៀនពីជគណិតលីនេអ៊ែ នោះគាត់មិនមែនជានិស្សិតគណិតវិទ្យាទេ >> ដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញាឈ្នាប់នាំឱ្យ។

ចម្លើយ

ក. កំណត់បកាសន៍ $p \to q$, $q \to p$, $\bar{p} \to q$ និង $\bar{q} \to \bar{p}$ ។

យើងបាន៖

$p \to q$: បើសំណាងជានិស្សិតគណិតវិទ្យា នោះគាត់រៀនពីជគណិតលីនេអ៊ែ

$q \to p$: បើសំណាងរៀនពីជគណិតលីនេអ៊ែ នោះគាត់ជានិស្សិតគណិតវិទ្យា

$\bar{p} \to q$: បើសំណាងមិនមែនជានិស្សិតគណិតវិទ្យាទេ នោះគាត់រៀនពីជគណិតលីនេអ៊ែ

និង $\bar{q} \to \bar{p}$: បើសំណាងមិនរៀនពីជគណិតលីនេអ៊ែទេ នោះគាត់មិនមែនជានិស្សិតគណិតវិទ្យាទេ។

ខ. សរសេរបកាសន៍ដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញាឈ្នាប់នាំឱ្យគឺ $q \to \bar{p}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $(\neg a \to b) \wedge (\neg b \vee a)$ ។

ចម្លើយ

តារាងភាពពិតនៃ $(a \to b) \wedge (\neg b \vee a)$

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \to b$	$\neg b \vee a$	$(a \to b) \wedge (\neg b \vee a)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p : ត្រីកោណកែងមានមុំកែង២ , q : ផែនដីវិលជុំវិញព្រះអាទិត្យ ។ ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \to q$, $q \to p$, $\bar{p} \to \bar{q}$, $\bar{p} \to \bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

២. គេមានបកាសន៍ពីរគឺ a : ចរិយាសិក្សាស្រាវជ្រាវ

និង b : ចរិយាទៅបណ្ណាល័យ។

ក. កំណត់បកាសន៍ $a \to b$, $b \to a$, $\bar{a} \to b$ និង $\bar{b} \to \bar{a}$ ។

ខ. សរសេរបកាសន៍ខាងក្រោម៖

<< បើចរិយាទៅបណ្ណាល័យ នោះនាងមិនបានសិក្សាស្រាវជ្រាវទេ >>

<< បើចរិយាមិនបានសិក្សាស្រាវជ្រាវ នោះនាងមិនបានទៅបណ្ណាល័យទេ >>

ដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញាឈ្នាប់នាំឱ្យ។

១.២.៥ ឈ្នាប់សមមូល

និយមន័យ បកាសន៍ថ្មីមួយដែលភ្ជាប់បកាសន៍ p ជាមួយបកាសន៍ q ដោយប្រើ «ឈ្នាប់សមមូល $\leftrightarrow$» ហៅថា **បកាសន៍ឈ្នាប់សមមូល (ឬ បកាសន៍ទ្វេលក្ខខណ្ឌ)** នៃបកាសន៍ទាំងពីរ។ បកាសន៍សមាស « p សមមូល q ឬ p លុះត្រាតែ q » តាងដោយ « $p \leftrightarrow q$ » ជាបកាសន៍មួយដែលពិត តែក្នុងករណី p និង q ជាបកាសន៍ដែលមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា។

តារាងភាពពិត

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

សម្គាល់

អ្នកនិពន្ធខ្លះបានប្រើនិមិត្តសញ្ញា « $\Leftrightarrow$ » សម្រាប់ឈ្នាប់សមមូលនេះ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p : ភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសឡាវ , q : 19 + 5 = 25 ។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \leftrightarrow q$, $\bar{p} \leftrightarrow q$, $p \leftrightarrow \bar{q}$, $\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \leftrightarrow q$, $\bar{p} \leftrightarrow q$, $p \leftrightarrow \bar{q}$, $\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. (p) = 0 និង ត. (q) = 0 ។

យើងបាន៖

$\bar{p}$: ភ្នំពេញមិនមែនជារាជធានីនៃប្រទេសឡាវទេ និង ត. $(\bar{p}) = 1$ ។

$\bar{q}$: $19 + 5 \neq 25$ និង ត. $(\bar{q}) = 1$ ។

$p \leftrightarrow q$: ភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសឡាវ សមមូល 19 + 5 = 25

ហើយ ត. $(p \leftrightarrow q) = 1$ ។

$\bar{p} \leftrightarrow q$: ភ្នំពេញមិនមែនជារាជធានីនៃប្រទេសឡាវទេ សមមូល 19 + 5 = 25

ហើយ ត. $(\bar{p} \leftrightarrow q) = 0$ ។

$p \leftrightarrow \bar{q}$: ភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសឡាវ លុះត្រាតែ $19 + 5 \neq 25$

ហើយ ត. $(p \leftrightarrow \bar{q}) = 0$ ។

$\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$: ភ្នំពេញមិនមែនជារាជធានីនៃប្រទេសឡាវទេ លុះត្រាតែ $19 + 5 \neq 25$

ហើយ ត. $(\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}) = 1$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានបកាសន៍ពីរដូចខាងក្រោម៖

p : 31 ជាចំនួនបឋម និង q : 31 ចែកដាច់នឹង 7 ។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $q \to p$, $\bar{q} \to \bar{p}$, $\bar{p} \to \bar{q}$, $p \leftrightarrow q$ និង $\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$ ហើយកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ទាំងនេះ។

ចម្លើយ

កំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $q \to p$, $\bar{q} \to \bar{p}$, $\bar{p} \to \bar{q}$, $p \leftrightarrow q$, $\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. $(p) = 1$ និង ត. $(q) = 0$ ។

យើងបាន៖

$\bar{p}$: 31 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ និង ត. $(\bar{p}) = 0$ ។

$\bar{q}$: 31 ចែកមិនដាច់នឹង 7 ទេ និង ត. $(\bar{q}) = 1$ ។

$p \vee q$: 31 ជាចំនួនបឋម ឬ ចែកដាច់នឹង 7

ហើយ ត. $(p \vee q) = 1$ ។

$p \wedge q$: 31 ជាចំនួនបឋម និង ចែកដាច់នឹង 7

ហើយ ត. $(p \wedge q) = 0$ ។

$p \to q$: បើ 31 ជាចំនួនបឋម នោះវាចែកដាច់នឹង 7

ហើយ ត. $(p \to q) = 0$ ។

$q \to p$: បើ 31 ចែកដាច់នឹង 7 នាំឱ្យវាជាចំនួនបឋម

ហើយ ត. $(q \to p) = 1$ ។

$\bar{q} \to \bar{p}$: បើ 31 ចែកមិនដាច់នឹង 7 ទេ នោះវាមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ

ហើយ ត. $(\bar{q} \to \bar{p}) = 0$ ។

$\bar{p} \to \bar{q}$: បើ 31 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ នោះវាចែកមិនដាច់នឹង 7 ទេ

ហើយ ត. $(\bar{p} \to \bar{q}) = 1$ ។

$p \leftrightarrow q$: 31 ជាចំនួនបឋម លុះត្រាតែ វាចែកដាច់នឹង 7

ហើយ ត. $(p \leftrightarrow q) = 0$ ។

$\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$: 31 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ លុះត្រាតែ វាចែកមិនដាច់នឹង 7 ទេ

ហើយ ត. $(\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg q \wedge p)$ ។

ចម្លើយ

តារាងភាពពិតនៃ $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg q \wedge p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg q \wedge p$	$(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg q \wedge p)$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យបកាសន៍ពីរគឺ p: កុំព្យូទ័រនេះមានអានុភាពខ្លាំង ជាបកាសន៍ពិត , q: កម្មវិធីអ៊ីនធឺណិតនៃកុំព្យូទ័រនេះដំណើរការបានស្រួល ជាបកាសន៍ពិតដែរ ។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $q \to p$, $\bar{q} \to \bar{p}$, $\bar{p} \to \bar{q}$, $p \leftrightarrow q$, $\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

២. ចូរសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $(\neg p \leftrightarrow q) \to (\neg q \vee p)$ ។

១.៣ អនុគមន៍បកាសន៍

យើងដឹងថា មានអំណះអំណាងខ្លះជាប់ទាក់ទងនឹងគណិតវត្ថុមិនប្រាកដ ហើយដែលយើងមិនទាន់អាចសម្រេចបានថាពិត ឬ មួយមិនពិត ដូចជាអំណះអំណាង « 25 ចែកដាច់នឹង a » ជាដើម។ អំណះអំណាងនេះពិតឬមិនពិតទៅតាមគណិតវត្ថុ a ។ បើយើងយកគណិតវត្ថុ a នេះស្មើនឹងចំនួនគត់ធម្មជាតិ 5 នោះអំណះអំណាងនេះ ជាបកាសន៍ពិត តែបើយើងយក a ស្មើនឹងចំនួនគត់ធម្មជាតិ 7 វិញ នោះអំណះអំណាងនេះ ជាបកាសន៍មិនពិត។ អំណះអំណាងរបៀបនេះ ហៅថា អនុគមន៍បកាសន៍ ។

និយមន័យ អនុគមន៍បកាសន៍ (ឬ អនុគមន៍សំណើ[២]) ជាអំណះអំណាងឬជាឃ្លាដែលទាក់ទងនឹងអក្សរខ្លះ ហើយដែលក្លាយទៅជាបកាសន៍ (ឬបកាសន៍សមាស) កាលណាយើងជំនួសអក្សរទាំងនោះដោយគណិតវត្ថុត្រឹមត្រូវ។ យើងអាចតាងអនុគមន៍បកាសន៍ដោយអក្សរដូចជា $\varphi , \psi , A, B , \ldots$ ហើយគេសរសេរ $\varphi \equiv \varphi(a, b, c, \ldots)$ ដែល $a, b, c, \ldots$ ជាគណិតវត្ថុ។

សម្គាល់

អ្នកនិពន្ធខ្លះបានប្រើនិមិត្តសញ្ញាស្មើ « $\equiv$ » នេះជា « $=$ » វិញ ហើយយើងនឹងសិក្សាវានៅផ្នែក១.៤។

[២] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយនៃខេមរយានកម្មសិក្សា «*គណិតវិទ្យា៖ ពីជគណិត*» (ទីបញ្ចប់ ភាគ I) ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រពិសោធ ឆ្នាំ១៩៧៣។

ឧទាហរណ៍ គេមានអំណះអំណាងមួយចំនួនខាងក្រោម៖

ក. $\varphi(a) \equiv$ << 25 ចែកដាច់នឹង a >> ។

ខ. $\psi(y) \equiv$ << y ជាត្រីកោណ >> ។

គ. $A(p, q) \equiv$ << p តូចជាងឬស្មើ q >> ។

ឃ. $B(a,b) \equiv$ << a ជាចំនួនបឋមឬចែកដាច់នឹង b >> ។

អំណះអំណាងទាំងនេះ សុទ្ធតែជាអនុគមន៍បកាសន៍។ បើយើងជំនួសអក្សរដោយគណិតវត្ថុត្រឹមត្រូវ (ឬ តម្លៃជាចំនួន) យើងបានបកាសន៍ដូចជា៖

១. $\varphi(5) \equiv$ << 25 ចែកដាច់នឹង 5 >> ជាបកាសន៍ពិត

តែ $\varphi(14) \equiv$ << 25 ចែកដាច់នឹង 14 >> ជាបកាសន៍មិនពិត។

២. $\psi(ABC) \equiv$ << ABC ជាត្រីកោណ >> ជាបកាសន៍ពិត ប្រសិនបើ A, B, C ជាចំណុចបីរត់បិទត្រង់គ្នានៃប្លង់ តែ $\psi(AB) \equiv$ << AB ជាត្រីកោណ >> ជាបកាសន៍មិនពិត ប្រសិនបើ A, B ជាចំណុចពីរនៃប្លង់។

៣. $A(12, 8) \equiv$ << 12 តូចជាងឬស្មើ 8 >> ជាបកាសន៍មិនពិត

តែ $A(8, 12) \equiv$ << 8 តូចជាងឬស្មើ 12 >> ជាបកាសន៍ពិត។

៤. $B(13, 4) \equiv$ << 13 ជាចំនួនបឋមឬចែកដាច់នឹង 4 >> ជាបកាសន៍សមាសពិត

តែ $B(24, 19) \equiv$ << 24 ជាចំនួនបឋមឬចែកដាច់នឹង 19 >> ជាបកាសន៍សមាសមិនពិត។

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើនេះ យើងក៏អាចកំណត់បកាសន៍សមាសផ្សេងទៀតដូចជា $\varphi(5) \to A(12, 8)$ និង $A(12, 8) \leftrightarrow B(24, 19)$ បានដែរ។ យើងបាន៖

$\varphi(5) \to A(12, 8)$: បើ 25 ចែកដាច់នឹង 5 នោះ 12 តូចជាងឬស្មើ 8

ហើយ ត. ($\varphi(5) \to A(12, 8)$) = 0 ។

$A(12, 8) \leftrightarrow B(24, 19)$ 12 តូចជាងឬស្មើ 8 លុះត្រាតែ 24 ជាចំនួនបឋមឬចែកដាច់នឹង 19

ហើយ ត. ($A(12, 8) \leftrightarrow B(24, 17)$) = 1 ។

ប្រតិបត្តិ

គេមានអំណះអំណាងមួយចំនួនខាងក្រោម៖

ក. $P(x) \equiv$ << x ជាចំនួនបឋម >> ។

ខ. $Q(x, y) \equiv$ << x ចែកដាច់នឹង y >> ។

គ. $R(a,b) \equiv$ << a ធំជាងឬស្មើ b >> ។

ក. ចូរកំណត់បកាសន៍ $P(2)$, $P(51)$, $P(2)\vee P(51)$, $P(2)\wedge P(51)$, $P(2)\to P(51)$, $P(51)\to P(2)$, $P(51)\leftrightarrow P(2)$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ខ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $Q(34,17)$, $Q(38,13)$, $Q(34,17)\vee Q(38,13)$, $Q(34,17)\wedge Q(38,13)$, $Q(34,17)\to Q(38,13)$, $Q(38,13)\to Q(34,17)$, $Q(38,13)\leftrightarrow Q(34,17)$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

គ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $R(23,16)$, $R(15,27)$, $R(23,16)\vee R(15,27)$, $R(15,27)\wedge R(23,16)$, $R(23,16)\to R(15,27)$, $R(15,27)\to R(23,16)$, $R(15,27)\leftrightarrow R(23,16)$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

ឃ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $P(51)\vee R(23,16)$, $R(15,27)\vee Q(34,17)$, $P(2)\vee Q(34,17)$, $R(15,27)\wedge P(2)$, $R(15,27)\wedge Q(34,17)$, $P(2)\wedge Q(34,17)$. $P(2)\to R(23,16)$, $R(23,16)\to Q(34,17)$, $P(2)\leftrightarrow R(15,27)$, $P(51)\leftrightarrow Q(34,17)$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

១.៤ សមមូលតក្កៈ

និយមន័យ គេថាបកាសន៍សមាសពីរ $P(p, q, r, ...)$, $Q(p, q, r, ...)$ សមមូលតក្កៈ ឬ ស្មើគ្នា កំណត់សរសេរដោយ $P(p, q, r, ...)\equiv Q(p, q, r, ...)$ កាលណាបកាសន៍សមាសទាំងពីរមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា មានន័យថា ក្នុងជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតទាំងពីរមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា។

យើងមានវិធីពីរក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(p, q, r, ...)\equiv Q(p, q, r, ...)$ ។ វិធីទី១ យើងសង់តារាងភាពពិតពីរផ្សេងគ្នានៃបកាសន៍សមាស $P(p, q, r, ...)$ ផងនិង $Q(p, q, r, ...)$ ផង រួចហើយប្រៀបធៀបលទ្ធផលក្នុងជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតទាំងពីរ។ ចំណែកឯវិធីទី២វិញ យើងសង់តារាងភាពពិតមួយរួមគ្នានៃបកាសន៍សមាស $P(p, q, r, ...)$ និង $Q(p, q, r, ...)$ រួចហើយប្រៀបធៀបលទ្ធផលរបស់វា។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា $\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$ តាមពីររបៀប។

ចម្លើយ

របៀបទី១ ជាដំបូង យើងសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $\neg(p\vee q)$ និង $\neg p\wedge\neg q$ ។

p	q	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតទាំងពីរខាងលើមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា នាំឱ្យ
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ ។

របៀបទី២ យើងសង់តារាងភាពពិតមួយរួមគ្នានៃបកាសន៍សមាសទាំងពីរ។

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

ដោយជួរឈរទី៦និងទី៧នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា នាំឱ្យ
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា $p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg q \to \neg p$ ។

ចម្លើយ

យើងសង់តារាងភាពពិតមួយរួមគ្នានៃបកាសន៍សមាសទាំងបីនេះ។

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$\neg q \to \neg p$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

ដោយជួរឈរទី៥ ទី៦និងទី៧នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា នាំឱ្យ
$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg q \to \neg p$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. បង្ហាញថា $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ តាមពីររបៀប។

២. បង្ហាញថា $p \leftrightarrow q \equiv [(p \to q) \wedge (q \to p)]$ ។

៣. បង្ហាញថា $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ។

១.៥ ចីរៈសច្ចភាព និង ចីរៈអសច្ចភាព

និយមន័យ ចីរសច្ចភាព ឬ តូតូឡូហ្ស៊ី (Tautology) ជាបកាសន៍សមាសដែលពិតជានិច្ច (មានន័យថា ក្នុងជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតសុទ្ធតែ 1 ទាំងអស់)។ រីឯ ចីរអសច្ចភាព ឬ អង់ទីឡូហ្ស៊ី (Contradiction) ជាបកាសន៍សមាសដែលមិនពិតជានិច្ច (មានន័យថា ក្នុងជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតសុទ្ធតែ 0 ទាំងអស់)។

ឧទាហរណ៍ សង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍ $a\vee\neg a$ និង $a\wedge\neg a$ ។

ចម្លើយ

តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍ $a\vee\neg a$ និង $a\wedge\neg a$

a	$\neg a$	$a\vee\neg a$	$a\wedge\neg a$	$\neg(a\vee\neg a)$	$\neg(a\wedge\neg a)$
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1

ដោយជួរឈរទី៣និងទី៤នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ និង 0 ទាំងអស់រៀងគ្នា នាំឱ្យបកាសន៍ $a\vee\neg a$ ជាចីរសច្ចភាព និង បកាសន៍ $a\wedge\neg a$ ជាចីរអសច្ចភាព ។

ប្រសិនបើ a ជាបកាសន៍ថា « គោមានជើង៤ » នោះយើងទទួលបានបកាសន៍ពិតជានិច្ចគឺ $a\vee\neg a$: គោមានជើង៤ ឬ មិនមានជើង៤ទេ។

ម្យ៉ាងទៀត តាមតារាងភាពពិតនៃឧទាហរណ៍ខាងលើ យើងឃើញថាបកាសន៍ $a\vee\neg a$ ជាចីរសច្ចភាព និង បកាសន៍ $\neg(a\vee\neg a)$ ជាចីរអសច្ចភាព ហើយបកាសន៍ $a\wedge\neg a$ ជាចីរអសច្ចភាព និង បកាសន៍ $\neg(a\wedge\neg a)$ ជាចីរសច្ចភាព ។ ហេតុនេះ គេមានទ្រឹស្តីបទទី១ខាងក្រោម៖

ទ្រឹស្តីបទទី១ បើ $P(p, q, r,...)$ ជាចីរសច្ចភាព នោះគេបាន $\neg P(p, q, r,...)$ ជាចីរអសច្ចភាព និងផ្ទុយមកវិញ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ បើ $P(p, q, r,...)$ ជាចីរសច្ចភាព (ជាចីរអសច្ចភាព) នោះគេបាន $P(P_1, P_2, P_3, ...)$ ជាចីរសច្ចភាព (ជាចីរអសច្ចភាព) ចំពោះគ្រប់បកាសន៍សមាស $P_1, P_2, P_3, ...$ ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថាបកាសន៍សមាស $(p\wedge\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg q)$ ជាចីរសច្ចភាព តាមពីររបៀប គឺថារបៀបទី១តាមការសង់តារាងភាពពិត និង របៀបទី២តាមទ្រឹស្តីបទទី២។

ចម្លើយ

របៀបទី១ យើងសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $(p\wedge\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg q)$ ។

p	q	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg(p\wedge\neg q)$	$(p\wedge\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg q)$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

ដោយជួរឈរទី៦នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិតស្មើនឹង 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $(p\wedge\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg q)$ ជាចីរសច្ចភាព ។

របៀបទី២

តាមឧទាហរណ៍មុន នាំឱ្យបកាសន៍ $P(a)\equiv a\vee\neg a$ ជាចីរសច្ចភាព

និងតាងបកាសន៍សមាស $P_1\equiv p\wedge\neg q$ ។

នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី២នាំឱ្យបកាសន៍សមាស

$P(P_1)\equiv P_1\vee\neg P_1\equiv(p\wedge\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg q)$ ជាចីរសច្ចភាព ។

ប្រតិបត្តិ

បង្ហាញថាបកាសន៍សមាស $(\neg p\vee q)\wedge\neg(\neg p\vee q)$ ជាចីរអសច្ចភាព តាមពីររបៀបគឺថារបៀបទី១ តាមការសង់តារាងភាពពិត និង របៀបទី២តាមទ្រឹស្តីបទទី២។

១.៦ ពីជគណិតនៃបកាសន៍

ទ្រឹស្តីបទទី៣ គ្រប់បកាសន៍បំពេញលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

១. លក្ខណៈអ៊ីដឹមប៉ូតង់ $p\vee p\equiv p$, $p\wedge p\equiv p$

២. លក្ខណៈផ្តុំ $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$, $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

៣. លក្ខណៈត្រឡប់ $p\vee q\equiv q\vee p$, $p\wedge q\equiv q\wedge p$

៤. លក្ខណៈបំបែក $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

៥. លក្ខណៈខ្លួនឯង $p\vee f\equiv p\equiv f\vee p$, $p\wedge f\equiv f\equiv f\wedge p$

$p\vee t\equiv t\equiv t\vee p$, $p\wedge t\equiv p\equiv t\wedge p$

៦. លក្ខណៈបំពេញ $p\vee\neg p\equiv t\equiv\neg p\vee p$, $p\wedge\neg p\equiv f\equiv\neg p\wedge p$

$\neg t\equiv f$, $\neg f\equiv t$

៧. លក្ខណៈអាំងវ៉ូលុយស្យុង $\neg(\neg p)\equiv p$

៨. លក្ខណៈដឺម៉កង់ $\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$, $\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$

៩. លក្ខណៈផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម $p\rightarrow q\equiv\neg q\rightarrow\neg p$

១០. លក្ខណៈបណ្ដាល $p\rightarrow q\equiv\neg p\vee q\equiv\neg(p\vee\neg q)$

$\neg p\rightarrow q\equiv p\vee q$, $\neg(p\rightarrow\neg q)\equiv p\wedge q$

១១. លក្ខណៈសមមូល $p\leftrightarrow q\equiv[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)]$

១២. លក្ខណៈលំនាំចេញ $(p\wedge q)\rightarrow r\equiv p\rightarrow(q\rightarrow r)$

១៣. លក្ខណៈស្រូបចូល $(p\vee q)\wedge(p\wedge q)\equiv p\wedge q$

ក្នុងនេះ t ជាចីរសច្ចភាព និង f ជាចីរអសច្ចភាព។

ដោយសារយើងមានរូបមន្តច្រើន ហេតុនេះ យើងសូមសម្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តមួយចំនួនដូចតទៅៈ

១. ស្រាយថា $p\vee p\equiv p$ និង $p\wedge p\equiv p$ ។

ជាដំបូង យើងសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍ $p\vee p$ និង $p\wedge p$ ។

p	p	$p\vee p$	$p\wedge p$
1	1	1	1
0	0	0	0

ដោយជួរឈរទី១ ទី៣និងទី៤នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យបកាសន៍ $p\vee p\equiv p$ និង $p\wedge p\equiv p$ ។

៣. ស្រាយថា $p\vee q\equiv q\vee p$ ។

យើងសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $p\vee q$ និង $q\vee p$ ។

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

ដោយជួរឈរទី៣និងទី៤នៃតារាងភាពពិតមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យយើងបានបកាសន៍ $p \vee q \equiv q \vee p$ ។

២. ស្រាយថា $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ។
យើងសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $(p \vee q) \vee r$ និង $p \vee (q \vee r)$ ។

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

ដោយជួរឈរទី៦និងទី៧នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា នាំឱ្យ
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ។

៤. ស្រាយថា $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ។

យើងសង់តារាងភាពពិតរួមមួយនៃបកាសន៍សមាស $p \vee (q \wedge r)$ និង $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ។

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

ដោយជួរឈរទី៧និងទី៨នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា នាំឱ្យ
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថាបកាសន៍សមាស $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ ជាចីរសច្ចភាពតាមបីរបៀប។

ចម្លើយ

បង្ហាញថាបកាសន៍សមាស $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ ជាចីរសច្ចភាពតាមបីរបៀប។

របៀបទី១ យើងសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $(a \wedge b) \to (a \vee b)$។

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$(a \wedge b) \to (a \vee b)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $(a \wedge b) \to (a \vee b)$ ជាចីរសច្ចភាព ។

របៀបទី២ យើងអាចសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $(a \wedge b) \to (a \vee b)$ តាមទម្រង់មួយទៀត។

a	b	(a	$\wedge$	b)	$\to$	(a	$\vee$	b)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0
ជំហាន		i	ii	i	iv	i	iii	i

យើងបានតម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ $(a \wedge b) \to (a \vee b)$ ជាតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ក្នុងជួរឈរជំហានទី៤ ដែលជាជំហានចុងក្រោយ។ នាំឱ្យបកាសន៍ $(a \wedge b) \to (a \vee b)$ ជាចីរសច្ចភាព ។

របៀបទី៣ តាមលក្ខណៈនៃទ្រឹស្តីបទទី៣ យើងបាន៖

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \to (a \vee b) &\equiv \neg(a \wedge b) \vee (a \vee b) && (\text{លក្ខណៈបណ្តាល}) \\
&\equiv (\neg a \vee \neg b) \vee (a \vee b) && (\text{លក្ខណៈដឺម៉កង់}) \\
&\equiv (\neg a \vee a) \vee (\neg b \vee b) && (\text{លក្ខណៈផ្តុំនិងត្រឡប់}) \\
&\equiv (a \vee \neg a) \vee (b \vee \neg b) && (\text{លក្ខណៈត្រឡប់}) \\
&\equiv t \vee t \equiv t && (\text{លក្ខណៈអ៊ីដឹមប៉ូតង់})\text{។}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ បកាសន៍សមាស $(a\wedge b)\to(a\vee b)$ ជាចីរសច្ចភាព ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា $(a\vee b)\wedge\neg a\equiv\neg a\wedge b$ តាមពីររបៀប។

ចម្លើយ

បង្ហាញថា $(a\vee b)\wedge\neg a\equiv\neg a\wedge b$ តាមពីររបៀប។

របៀបទី១ យើងសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាស $\neg a\wedge b$ និង $(a\vee b)\wedge\neg a$ ។

a	b	$\neg a$	$a\vee b$	$\neg a\wedge b$	$(a\vee b)\wedge\neg a$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

ដោយជួរឈរទី៥និងទី៦នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យយើងបានបកាសន៍សមាស $(a\vee b)\wedge\neg a\equiv\neg a\wedge b$ ។

របៀបទី២ តាមលក្ខណៈនៃទ្រឹស្តីបទទី៣ យើងបាន៖

$(a\vee b)\wedge\neg a\equiv\neg a\wedge(a\vee b)$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$\equiv(\neg a\wedge a)\vee(\neg a\wedge b)$ (លក្ខណៈបំបែក)

$\equiv(a\wedge\neg a)\vee(\neg a\wedge b)$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$\equiv f\vee(\neg a\wedge b)$ (លក្ខណៈបំពេញ)

$\equiv(\neg a\wedge b)\vee f$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$\equiv\neg a\wedge b$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)។

ដូច្នេះ យើងបាន $(a\vee b)\wedge\neg a\equiv\neg a\wedge b$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. បង្ហាញថាបកាសន៍សមាស $(\neg p\wedge\neg q)\to(\neg p\vee\neg q)$ ជាចីរសច្ចភាពតាមបីរបៀប។

២. បង្ហាញថា $(\neg a\wedge\neg b)\vee a\equiv a\vee\neg b$ តាមពីររបៀប។

១.៧ វិចារ

និយមន័យ វិចារ ឬ **អាគុយម៉ង់** ជាអំណះអំណាងដែលពីសំណុំនៃបកាសន៍ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ហៅថា សម្មតិកម្ម ទាញបានបកាសន៍ Q មួយផ្សេងទៀត ហៅថា សេចក្តីសន្និដ្ឋាន ។

គេកំណត់សរសេរវិចារនេះដោយ

$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ ។[៣]

ប្រសិនបើសេចក្តីសន្និដ្ឋាន Q ពិតចំពោះគ្រប់សម្មតិកម្ម $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ពិតព្រមគ្នា នោះគេថាវិចារ $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ ត្រឹមត្រូវ (បានការឬយកជាការបាន)។ បើមិនដូចនេះទេ នោះគេថា វិចារនេះមិនត្រឹមត្រូវ (មិនបានការឬមិនយកជាការបាន)។

គេមានគ្រប់បកាសន៍ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ពិតព្រមគ្នា លុះត្រាតែបកាសន៍ $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ ពិត។ គេបានវិចារ $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ លុះត្រាតែគ្រប់បកាសន៍ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ពិតព្រមគ្នា គេបាន Q ពិត លុះត្រាតែបកាសន៍ $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$ ជាចីរសច្ចភាព ។ ហេតុនេះ យើងបានទ្រឹស្តីបទទី៤ខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ វិចារ $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ លុះត្រាតែបកាសន៍ $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$ ជាចីរសច្ចភាព ។

ពីទ្រឹស្តីបទទី៤នេះ យើងអាចទាញបានវិបាកថា បើបកាសន៍ $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$ មិនមែនជាចីរសច្ចភាពទេ នោះវិចារ $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ ជាវិចារមិនត្រឹមត្រូវទេ ។

សម្គាល់

អ្នកនិពន្ធសៀវភៅពីជគណិតខ្លះបានបកប្រែពាក្យ argument ថា ទឡ្ហីករណ៍។

ឧទាហរណ៍ ស្រាយបំភ្លឺថាវិចារ $p, p \to q \vdash q$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

ចម្លើយ

ស្រាយថាវិចារ $p, p \to q \vdash q$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

ដោយវិចារនេះមាន $p, p \to q$ ជាសម្មតិកម្មពីរ និង q ជាសេចក្តីសន្និដ្ឋាន

នោះយើងបង្កើតបកាសន៍ $[p \wedge (p \to q)] \to q$ និងសង់តារាងភាពពិតវាខាងក្រោម៖

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

[៣] https://slideplayer.com/slide/3822176/

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $[p\wedge(p\to q)]\to q$ ជាថីរសច្ចភាព ។
តាមទ្រឹស្តីបទទី៤ យើងបានវិចារ $p, p\to q \vdash q$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

ឧទាហរណ៍ ស្រាយបំភ្លឺថាវិចារ $p\to q, q \vdash p$ ជាវិចារមិនត្រឹមត្រូវទេ។

ចម្លើយ

ស្រាយថាវិចារ $p\to q, q \vdash p$ ជាវិចារមិនត្រឹមត្រូវទេ។
ដោយវិចារនេះមាន $p\to q, q$ ជាសម្មតិកម្មពីរ និង p ជាសេចក្តីសន្និដ្ឋាន
នោះយើងបង្កើតបកាសន៍ $[(p\to q)\wedge q]\to p$ និងសង់តារាងភាពពិតវាខាងក្រោម៖

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\wedge q$	$[(p\to q)\wedge q]\to p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 0 ម្តងកើតឡើង នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $[(p\to q)\wedge q]\to p$ មិនមែនជាថីរសច្ចភាពទេ ។
តាមវិបាកនៃទ្រឹស្តីបទទី៤ យើងបានវិចារ $p\to q, q \vdash p$ ជាវិចារមិនត្រឹមត្រូវទេ។

សុពលភាព (ត្រឹមត្រូវ ឬ មិនត្រឹមត្រូវ) នៃវិចារណាមួយ មិនអាស្រ័យលើតម្លៃភាពពិត ឬ មាតិកានៃបកាសន៍ដែលកើតឡើងនៅក្នុងវិចារនោះទេ ប៉ុន្តែវាផ្អែកលើរចនាសម្ព័ន្ធត្រឹមត្រូវនៃវិចារតែប៉ុណ្ណោះ។ វិធីមួយក្នុងការតាងវិចារបានបង្ហាញតាមរយៈឧទាហរណ៍ខាងក្រោម។

ឧទាហរណ៍ ចូរកំណត់សុពលភាព (ឬ វិភាគ) នូវវិចារ៖

P_1 : បើបុរសម្នាក់នៅកំលោះ នោះគាត់មិនសប្បាយចិត្ត ។

P_2 : បើបុរសម្នាក់មិនសប្បាយចិត្ត នោះគាត់ស្លាប់នៅវ័យក្មេង ។

………………………………………………………………………….…

Q : បុរសនៅកំលោះ ស្លាប់នៅវ័យក្មេង ។

ក្នុងនេះបកាសន៍ Q នៅខាងក្រោមបន្ទាត់គ្រែតាងឱ្យសេចក្តីសន្និដ្ឋាននៃវិចារ ហើយបកាសន៍ P_1, P_2 នៅខាងលើបន្ទាត់គ្រែតាងឱ្យសម្មតិកម្មនៃវិចារ។

ចម្លើយ

កំណត់សុពលភាព (ឬ វិភាគ) នូវវិចារ។
ដើម្បីកំណត់សុពលភាពនូវវិចារនេះ យើងត្រូវកំណត់បកាសន៍ដូចតទៅ៖

p : គាត់នៅកំលោះ ។

q : គាត់មិនសប្បាយចិត្ត ។

r : គាត់ស្លាប់នៅវ័យក្មេង ។

យើងបានវិចារនេះគឺ $P_1 , P_2 \vdash Q$

ដែលបកាសន៍សមាស $P_1 \equiv p \to q, P_2 \equiv q \to r$ ជាសម្មតិកម្មពីរ និង $Q \equiv p \to r$ ជាសេចក្តីសន្និដ្ឋាន។ នោះយើងបង្កើតបកាសន៍សមាស $B \equiv (P_1 \wedge P_2) \to Q \equiv [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ និង សង់តារាងភាពពិតរបស់វាខាងក្រោម៖

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	B
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

ដោយជួរឈរទី៨នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស B ជាចីរសច្ចភាព ។
តាមទ្រឹស្តីបទទី៤ យើងបានវិចារ $P_1 , P_2 \vdash Q$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

សម្គាល់

បកាសន៍សមាស $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ ជាចីរសច្ចភាព ។ វាហៅថា សម្មតិកម្មស៊ីឡូ ។

ប្រភេទមួយទៀតនៃវិចារ មិនខុសគ្នារវាងបកាសន៍ទាំងឡាយ និង សេចក្តីសន្និដ្ឋានទេដោយប្រើមួយបន្ទាត់ត្រេ ហើយវិចារខ្លះក៏គេសរសេរមិនបញ្ចូលបន្ទាត់ត្រេនេះដែរ។ យ៉ាងណាក៏ដោយ លោកអ្នកនៅតែអាចកំណត់នូវសេចក្តីសន្និដ្ឋានបាន។ ជាធម្មតា វាមានពាក្យ « ដូចនេះ ឬ ដូច្នេះ » ប៉ុន្តែមិនជានិច្ចទេ។

ឧទាហរណ៍ ចូរវិភាគនូវវិចារខាងក្រោម៖

P_1 : ប្រសិនបើគាត់មិនមានការពន្យល់ទេ នោះគាត់នឹងមានកំហុស។

P_2 : គាត់មានការពន្យល់ ឬមួយគាត់បានធ្វើគម្រោង។

……………………………………………………………………………..........

Q : ដូចនេះ ប្រសិនបើគាត់បានធ្វើគម្រោង នោះគាត់នឹងមានកំហុស។

ចម្លើយ

ការវិភាគនូវវិចារ។

តាង a ជាបកាសន៍ « គាត់មិនមានការពន្យល់ទេ។ »

តាង b ជាបកាសន៍ « គាត់នឹងមានកំហុស។ »

តាង c ជាបកាសន៍ « គាត់បានធ្វើគម្រោង។ »

យើងបានវិចារនេះគឺ $P_1 , P_2 \vdash Q$

ដែលបកាសន៍សមាស $P_1 \equiv a \to b, P_2 \equiv \neg a \vee c$ ជាសម្មតិកម្មពីរនិង $Q \equiv c \to b$ ជាសេចក្ដីសន្និដ្ឋាន។ យើងបង្កើតបកាសន៍សមាស $D \equiv (P_1 \wedge P_2) \to Q \equiv [(a \to b) \wedge (\neg a \vee c)] \to (c \to b)$ និងសង់តារាងភាពពិតរបស់វាខាងក្រោម៖

a	b	c	$\neg a$	$a \to b$	$\neg a \vee c$	$c \to b$	$(a \to b) \wedge (\neg a \vee c)$	D
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1

ដោយជួរឈរទី៩នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 0 មួយកើតឡើង នាំឱ្យបកាសន៍ D មិនមែនជាបីរសច្ចភាពទេ ។

តាមទ្រឹស្ដីបទទី៤ យើងបានវិចារ $P_1 , P_2 \vdash Q$ ជាវិចារមិនត្រឹមត្រូវ ។

ប្រតិបត្តិ

១. កំណត់សុពលភាព (ឬ វិភាគ) នូវវិចារ $p \vee q, \neg p \vdash q$ ។

២. ចូរវិភាគនូវវិចារៈ លោកគ្រូម្នាក់គួរឱ្យចូលចិត្ត បានដាស់ឱ្យខ្ញុំភ្ញាក់ឡើង។ ខ្ញុំបានភ្ញាក់ឡើងនៅក្នុងថ្នាក់រៀនរបស់គ្រូកុំព្យូទ័រ។ ដូច្នេះ លោកគ្រូកុំព្យូទ័ររបស់ខ្ញុំ គួរឱ្យចូលចិត្ត ។

១.៨ បរិមាណករ

បរិមាណករមានបីគឺ បរិមាណគ្រប់ បរិមាណករមាន និង បរិមាណករមានតែមួយគត់។

១.៨.១ បរិមាណករមាន [៤]

បរិមាណករមាន តាងដោយសញ្ញា $\exists$ មានន័យថា « មានយ៉ាងតិចមួយ » ឬ « មានយ៉ាងតិច ...មួយដែល »។ គេប្រើបរិមាណករ $\exists$ ដើម្បីភ្ជាប់អថេរនៃអនុគមន៍បកាសន៍មួយទៅនឹងសំណុំសាកលមួយ ដែលត្រូវបានកំណត់ក្នុងគោលគំនិតបម្លែងពីអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរទៅជាបកាសន៍ ពីអនុគមន៍បកាសន៍ពីរអថេរទៅជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ រួចទៅជាបកាសន៍ និង បន្តបន្ទាប់...។

បើគេមាន E ជាសំណុំមួយ និង $A(x)$ ជាបកាសន៍ធៀបនឹង x ឬ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x នោះបកាសន៍បរិមាណករមានគឺ

$\exists x \in E : A(x)$ អានថា « មាន x ជារបស់សំណុំ E ដែលមានលក្ខណៈ A »។

សម្គាល់

អ្នកនិពន្ធសៀវភៅពីជគណិត ឬ តក្កវិទ្យាខ្លះបានសរសេរបកាសន៍បរិមាណករមានជារាង
$\exists x \in E, A(x)$ ឬ $(\exists x \in E)\ A(x)$។

ឧទាហរណ៍

ក. $x+3=x+11$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x ។

នាំឱ្យ $\exists x \in \mathbb{R} : x+3=x+11$ ជាបកាសន៍មួយ។

វាជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះ $3 \neq 11$ ។

ខ. $t^2+5=14$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ t ។

នាំឱ្យ $\exists\, t \in \mathbb{Z} : t^2+5=14$ ជាបកាសន៍មួយ។

វាជាបកាសន៍ពិត ពីព្រោះ $\exists\, t=3 \in \mathbb{Z} : t^2+5 = 3^2+5 = 9+5=14$ ។

គ. $3y+2x=14$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ពីរអថេរ x និង y ។

នាំឱ្យ $\exists y \in \mathbb{Z} : 3y+2x=14$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x ។

[៤] ឈឹម ម៉េង «*ពីជគណិតទូទៅ*» ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១០ ។

នាំឱ្យ $\exists y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} : 3y + 2x = 14$ ជាបកាសន៍មួយ ។

វាជាបកាសន៍ពិត ពីព្រោះ $\exists y = 2 \in \mathbb{Z}, \exists x = 4 \in \mathbb{Z} : 3y + 2x = 3(2) + 2(4) = 6 + 8 = 14$ ។

ប្រតិបត្តិ

ចូរកំណត់ថាតើអំណះអំណាងខាងក្រោមមួយណាជាបកាសន៍ ឬ ជាអនុគមន៍បកាសន៍៖

ក. $y + 5 \geq y + 25$

ខ. $\exists\, t \in \mathbb{R} : t + 5 > t + 15$

គ. $3y^2 + 2xy = 9$

ឃ. $\exists y \in \mathbb{Z} : 3y^2 + 2xy = 9$

ង. $\exists t \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} : 3t^2 + 2xt = 9$ ។

បើអំណះអំណាងខាងលើណាមួយ ជាបកាសន៍ ចូររកតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

១.៨.២ បរិមាណករមានតែមួយគត់

បរិមាណករមានតែមួយគត់ តាងដោយសញ្ញា $\exists!$ មានន័យថា « មាន ... តែមួយគត់ ដែល » ។ គេប្រើបរិមាណករ $\exists!$ ដើម្បីភ្ជាប់អថេរនៃអនុគមន៍បកាសន៍មួយទៅនឹងសំណុំសាកលមួយ ដែលត្រូវបានកំណត់ក្នុងគោលគំនិតបម្លែងពីអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរទៅជាបកាសន៍ ពីអនុគមន៍បកាសន៍ពីរអថេរទៅជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ រួចទៅជាបកាសន៍ និង បន្តបន្ទាប់...។

បើគេមាន E ជាសំណុំមួយ និង $A(x)$ ជាបកាសន៍ធៀបនឹង x ឬ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x នោះបកាសន៍បរិមាណករមានតែមួយគត់គឺ

$\exists!\, x \in E : A(x)$ អានថា « មាន x តែមួយគត់ជារបស់សំណុំ E ដែលមានលក្ខណៈ A » ។

ឧទាហរណ៍

ក. $3x + 3 = 15$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x ។

នាំឱ្យ $\exists!\, x \in \mathbb{R} : 3x + 3 = 15$ ជាបកាសន៍មួយ។

វាជាបកាសន៍ពិត ពីព្រោះ $\exists!\, x = 4 \in \mathbb{R}$ ដែល $3x + 3 = 3(4) + 3 = 12 + 3 = 15$ ។

ខ. $y^2 + 5 = 21$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ y ។

នាំឱ្យ $\exists!\, y \in \mathbb{Z} : y^2 + 5 = 21$ ជាបកាសន៍មួយ។

វាជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះ $\exists y = \pm 4 \in \mathbb{Z} : y^2 + 5 = (\pm 4)^2 + 2 = 16 + 5 = 21$ ។

គ. $2y^2 + 3x^2 = 14$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ពីរអថេរ x និង y ។

នាំឱ្យ $\exists!\, x \in \mathbb{Z} : 2y^2 + 3x^2 = 14$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ y ។

នាំឱ្យ $\exists!\, y \in \mathbb{Z}, \exists!\, x \in \mathbb{Z} : 2y^2 + 3x^2 = 14$ ជាបកាសន៍មួយ។

វាជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះ

$\exists\, y = \pm 1 \in \mathbb{Z}, \exists\, x = \pm\, 2 \in \mathbb{Z} : 2y^2 + 3x^2 = 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 = 2 + 12 = 14$ ។

ប្រតិបត្តិ

ចូរកំណត់ថាតើអំណះអំណាងខាងក្រោមមួយណាជាបកាសន៍ ឬ ជាអនុគមន៍បកាសន៍៖

ក. $\exists!\, x \in \mathbb{Q} : 3x + 4 = 22$

ខ. $3y + 4 = 22$

គ. $\exists!\, y \in \mathbb{N} : 8 + xy = 9$

ឃ. $8 + xy = 9$

ង. $\exists!\, x \in \mathbb{N}, \exists!\, y \in \mathbb{N} : 8 + xy = 9$ ។

បើអំណះអំណាងខាងលើណាមួយ ជាបកាសន៍ ចូររកតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

១.៨.៣ បរិមាណករគ្រប់

បរិមាណករគ្រប់ តាងដោយសញ្ញា $\forall$ មានន័យថា << ចំពោះគ្រប់...>> ។ គេប្រើបរិមាណករ $\forall$ ដើម្បីភ្ជាប់អថេរនៃអនុគមន៍បកាសន៍មួយទៅនឹងសំណុំសាកលមួយ ដែលត្រូវបានកំណត់ក្នុងគោលគំនិតបម្លែងពីអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរទៅជាបកាសន៍ ពីអនុគមន៍បកាសន៍ពីរអថេរទៅជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេររួចទៅជាបកាសន៍ និង បន្តបន្ទាប់...។

បើគេមាន E ជាសំណុំមួយ និង $A(x)$ ជាបកាសន៍ធៀបនឹង x ឬ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x នោះបកាសន៍បរិមាណករគ្រប់គឺ

$\forall x \in E : A(x)$ អានថា << ចំពោះគ្រប់ x ជារបស់សំណុំ E ដែលមានលក្ខណៈ A >> ។

ឧទាហរណ៍

ក. $5x - 7 = 5x - 7$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x ។

នាំឱ្យ $\forall x \in \mathbb{R} : 5x - 7 = 5x - 7$ ជាបកាសន៍មួយ។

វាជាបកាសន៍ពិត ពីព្រោះ $-7 = -7$ (ឬ $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$) ។

ខ. $y^2 + 3 = 8$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ y ។

នាំឱ្យ $\forall y \in \mathbb{Z} : y^2 + 3 = 8$ ជាបកាសន៍មួយ។

វាជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះបើយើងយក $y = 3 \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $y^2 + 3 = 3^2 + 3 = 12 \neq 8$ ។

គ. $3y^2 + 4x^2 \geq 0$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ពីរអថេរ x និង y ។

នាំឱ្យ $\forall x \in \mathbb{R} : 3y^2 + 4x^2 \geq 0$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ y ។

នាំឱ្យ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 3y^2 + 4x^2 \geq 0$ ជាបកាសន៍មួយ។

វាជាបកាសន៍ពិត ពីព្រោះ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ ។

ប្រតិបត្តិ

ចូរកំណត់ថាតើអំណះអំណាងខាងក្រោមមួយណាជាបកាសន៍ ឬ ជាអនុគមន៍បកាសន៍៖

ក. $\forall y \in \mathbb{R} : 3y^2 - 7 > 2y^2 - 8$

ខ. $3x^2 - 7 > 2x^2 - 8$

គ. $\forall y \in \mathbb{R} : 4y^2 - 3x^2 \geq 0$

ឃ. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 4y^2 - 3x^2 \geq 0$

ង. $4y^2 - 3x^2 \geq 0$ ។

បើអំណះអំណាងខាងលើណាមួយ ជាបកាសន៍ ចូររកតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

១.៨.៤ ឈ្នាប់មិនលើបរិមាណករ

តាង $A(x)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x និងតាង $B(x, y)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ពីរអថេរ x, y ។ គេមានរូបមន្តបួនដូចខាងក្រោម៖

ក. $\neg[\exists x : A(x)] \equiv \forall x : \neg A(x)$

ខ. $\neg[\forall x : A(x)] \equiv \exists x : \neg A(x)$

គ. $\neg[\exists x, \forall y : B(x, y)] \equiv \forall x, \exists y : \neg B(x, y)$

ឃ. $\neg[\forall x, \exists y : B(x, y)] \equiv \exists x, \forall y : \neg B(x, y)$ ។

ឧទាហរណ៍ កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ខាងក្រោម រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង៖

ក. $\forall x \in \mathbb{R} : |-2x| = -2x$ ខ. $\exists t \in \mathbb{R} : t^2 = -3t$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង។

ក. បកាសន៍ $\forall x \in \mathbb{R} : |-2x| = -2x$ ជាបកាសន៍មិនពិត

ពីព្រោះបើយើងយក $x = 2 \in \mathbb{R}$ នោះ $|-2x| = |-2(2)| = |-4| = 4 \neq -4 = -2(2) = -2x$ ។

ឈ្នាប់មិនលើបកាសន៍ $\forall x \in \mathbb{R} : |-2x| = -2x$ គឺ

$$\neg[\forall x \in \mathbb{R} : |-2x| = -2x] \equiv \exists x \in \mathbb{R} : \neg(|-2x| = -2x)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} : |-2x| \neq -2x \text{ ។}$$

ខ. បកាសន៍ $\exists t \in \mathbb{R} : t^2 = -3t$ ជាបកាសន៍ពិត ពីព្រោះយើងមាន $t = 0 \in \mathbb{R}$ នោះ $t^2 = 0^2 = 0 = -3(0) = -3t$ ។

ឈ្នាប់មិនលើបកាសន៍ $\exists\, t \in \mathbb{R} : t^2 = -3t$ គឺ

$$\neg[\exists\, t \in \mathbb{R} : t^2 = -3t] \equiv \forall t \in \mathbb{R} : \neg(t^2 = -3t)$$
$$\equiv \forall t \in \mathbb{R} : t^2 \neq -3t \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ខាងក្រោមចំពោះសំណុំ $E = \{1, 2, 3, 4\}$ រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង៖

ក. $\exists x, \forall y : x^2 < y + 3$ ខ. $\forall x, \exists y : x^2 + y^2 < 21$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង។

ក. បកាសន៍ $\exists x \in E, \forall y \in E : x^2 < y + 3$ ជាបកាសន៍មិនពិត

ពីព្រោះបើយើងមាន $x = 3 \in E$ និង យក $y = 2 \in E$ នោះ

$x^2 = 3^2 = 9 > 5 = 2 + 3 = y + 3$ ។

ឈ្នាប់មិនលើបកាសន៍ $\exists x \in E, \forall y \in E : x^2 < y + 3$ គឺ

$$\neg[\exists x \in E, \forall y \in E : x^2 < y + 3] \equiv \forall x \in E, \exists\, y \in E : \neg(x^2 < y + 3)$$
$$\equiv \forall x \in E, \exists\, y \in E : x^2 \geq y + 3 \text{ ។}$$

ខ. បកាសន៍ $\forall x \in E, \exists\, y \in E : x^2 + y^2 < 21$ ជាបកាសន៍ពិត

ពីព្រោះ $\forall x \in E, \exists\, y = 1 \in E : y^2 = 1^2 = 1 < 21 - x^2$ ។

ឈ្នាប់មិនលើបកាសន៍ $\forall x \in E, \exists\, y \in E : x^2 + y^2 < 21$ គឺ

$$\neg[\forall x \in E, \exists\, y \in E : x^2 + y^2 < 21] \equiv \exists\, x \in E, \forall y \in E : \neg(x^2 + y^2 < 21)$$
$$\equiv \exists\, x \in E, \forall y \in E : x^2 + y^2 \geq 21 \text{ ។}$$

ប្រតិបត្តិ

១. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ខាងក្រោម រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង៖

ក. $\forall x \in \mathbb{R} : |-2x| \geq -2x$

ខ. $\exists\, y \in \mathbb{R} : y^2 < 2y$ ។

២. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ខាងក្រោមចំពោះសំណុំ $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង៖

ក. $\exists x, \forall y : 5x + 3y^2 \geq 3$

ខ. $\forall x, \exists y : x^2 + 2y > 50$ ។

១.៨.៥ វិធីប្រើបរិមាណករ

តាង $A(x)$ និង $B(x)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍មួយអថេរ x ហើយតាង $P(x, y)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ពីរអថេរ x, y។ គេមានរូបមន្តប្រាំពីរដូចខាងក្រោម៖

ក. $[\forall x: A(x) \wedge B(x)] \equiv [\forall x: A(x)] \wedge [\forall x: B(x)]$

ខ. $[\exists x: A(x) \wedge B(x)] \rightarrow [\exists x: A(x)] \wedge [\exists x: B(x)]$

គ. $[\exists x: A(x) \vee B(x)] \equiv [\exists x: A(x)] \vee [\exists x: B(x)]$

ឃ. $[\forall x: A(x)] \vee [\forall x: B(x)] \rightarrow [\forall x: A(x) \vee B(x)]$

ង. $\left[\exists x, \exists y: P(x, y)\right] \equiv [\exists y, \exists x: P(x, y)]$

ច. $\left[\forall x, \forall y: P(x, y)\right] \equiv [\forall y, \forall x: P(x, y)]$

ឆ. $\left[\exists x, \forall y: P(x, y)\right] \rightarrow [\forall y, \exists x: P(x, y)]$ ។

ឧទាហរណ៍ កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ខាងក្រោម រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង៖

ក. $\forall z \in \mathbb{R}: z^2 \geq 0 \wedge 2z < 9$ ខ. $\exists t \in \mathbb{R}: t^2 + 2 < 0 \vee 3t = -6$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង។

ក. បកាសន៍ $[\forall z \in \mathbb{R}: z^2 \geq 0 \wedge 2z < 9] \equiv [\forall z \in \mathbb{R}: z^2 \geq 0] \wedge [\forall z \in \mathbb{R}: 2z < 9]$

ជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះបកាសន៍ $[\forall z \in \mathbb{R}: z^2 \geq 0]$ ជាបកាសន៍ពិត និង បកាសន៍ $[\forall z \in \mathbb{R}: 2z < 9]$ ជាបកាសន៍មិនពិត ដោយហេតុថាបើយើងយក $z = 5 \in \mathbb{R}$ នោះ $2z = 2(5) = 10 > 9$ ។

ឈ្នាប់មិនលើបកាសន៍ $\forall z \in \mathbb{R}: z^2 \geq 0 \wedge 2z < 9$ គឺ

$$\begin{aligned}\neg[\forall z \in \mathbb{R}: z^2 \geq 0 \wedge 2z < 9] &\equiv \neg[(\forall z \in \mathbb{R}: z^2 \geq 0) \wedge (\forall z \in \mathbb{R}: 2z < 9)] \\ &\equiv \neg(\forall z \in \mathbb{R}: z^2 \geq 0) \vee \neg(\forall z \in \mathbb{R}: 2z < 9) \\ &\equiv [\exists z \in \mathbb{R}: \neg(z^2 \geq 0)] \vee [\exists z \in \mathbb{R}: \neg(2z < 9)] \\ &\equiv [\exists z \in \mathbb{R}: z^2 < 0] \vee [\exists z \in \mathbb{R}: 2z \geq 9] \text{ ។}\end{aligned}$$

ខ. បកាសន៍ $[\exists t \in \mathbb{R}: t^2 + 2 < 0 \vee 3t = -6] \equiv [\exists t \in \mathbb{R}: t^2 + 2 < 0] \vee [\exists t \in \mathbb{R}: 3t = -6]$

ជាបកាសន៍ពិត ពីព្រោះបកាសន៍ $[\exists t \in \mathbb{R}: t^2 + 2 < 0]$ ជាបកាសន៍មិនពិត និង បកាសន៍ $[\exists t \in \mathbb{R}: 3t = -6]$ ជាបកាសន៍ពិត ដោយហេតុថាយើងមាន $t = -2 \in \mathbb{R}$ នោះ $3t = 3(-2) = -6$។

ឈ្នាប់មិនលើបកាសន៍ $\exists\, t \in \mathbb{R}:\ t^2+2<0\ \vee\ 3t=-6$ គឺ

$$\begin{aligned}
\neg[\exists\, t \in \mathbb{R}:\ t^2+2<0\ \vee\ 3t=-6] &\equiv \neg[(\exists\, t \in \mathbb{R}:\ t^2+2<0) \vee (\exists\, t \in \mathbb{R}: 3t=-6)] \\
&\equiv \neg(\exists\, t \in \mathbb{R}: t^2+2<0) \wedge \neg(\exists\, t \in \mathbb{R}: 3t=-6) \\
&\equiv [\forall t \in \mathbb{R}: \neg(t^2+2<0)] \wedge [\forall t \in \mathbb{R}: \neg(3t=-6)] \\
&\equiv [\forall t \in \mathbb{R}: t^2+2 \geq 0] \wedge [\forall t \in \mathbb{R}: 3t \neq -6] \\
&\equiv \forall t \in \mathbb{R}: t^2+2 \geq 0 \wedge 3t \neq -6
\end{aligned}$$ ។

សម្គាល់

កាលណាគេប្រើបរិមាណករពីរតគ្នា គេត្រូវគិតពីលំដាប់របស់វា។

ឧទាហរណ៍

ក. បកាសន៍ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}:\ y > x-8$ ជាបកាសន៍ពិត ពីព្រោះបើយើងយក $x = 2018 \in \mathbb{R}$ និងមាន $y = 2020 \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $y = 2020 > x-4 = 2018-8 = 2010$ ។

ខ. បកាសន៍ $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}:\ y > x-8$ ជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះបើយើងមាន $y = 2020 \in \mathbb{R}$ និងយក $x = 2030 \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $y = 2020 < x-8 = 2030-8 = 2022$ ។

ប្រតិបត្តិ

កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ខាងក្រោម រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផងៈ

ក. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}:\ y < x+2021$

ខ. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}:\ y < x+2021$

គ. $\forall x \in \mathbb{R}:\ (x-1)^2 \geq 0\ \wedge\ 2x > 10$

ឃ. $\exists\, y \in \mathbb{R}:\ y^2+1<0\ \vee 5y \leq -15$ ។

១.៩ ការប្រើប្រាស់ដ្យាក្រាមសម្រាប់ធ្វើតេស្តអំពីសុពលភាព

យើងបានសិក្សាអំពីវិចាររួចមកហើយនៅផ្នែក១.៧ ដែលយើងអាចកំណត់សុពលភាពឬវិភាគវិចារមួយតាមការបង្កើតបកាសន៍ និង ការសង់តារាងភាពពិតរបស់វា។ ឥឡូវនេះ យើងមានវិធីមួយទៀតសម្រាប់កំណត់សុពលភាពនៃវិចារដោយប្រើប្រាស់ដ្យាក្រាម ដែលបានវិភាគទានដោយលោក G. W. Leibniz (1646 - 1716) ជាគណិតវិទូ ជនជាតិអាឡឺម៉ង់។

ដើម្បីធ្វើតេស្តអំពីសុពលភាពឬវិភាគនៃវិចារមួយតាមដ្យាក្រាម តាងការពិតនៃសម្មតិកម្មទាំងពីរជាមួយដ្យាក្រាម។ បន្ទាប់មក ធ្វើការវិភាគដ្យាក្រាមដើម្បីឱ្យមើលឃើញថាតើពួកវាចាំបាច់តាងការពិតនៃសេចក្តីសន្និដ្ឋានដូចគ្នាទេ។

ឧទាហរណ៍ ចូរកំណត់សុពលភាពនៃវិចារដូចតទៅៈ

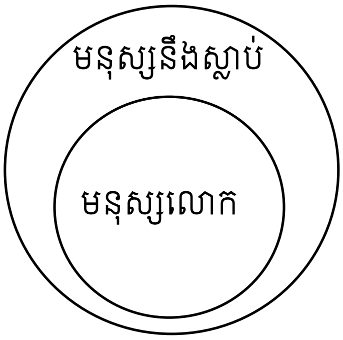
មនុស្សលោកគ្រប់គ្នាអាចបណ្តាលឱ្យស្លាប់។

លោក វ៉ឡូនៈ មិនបណ្តាលឱ្យស្លាប់ទេ។

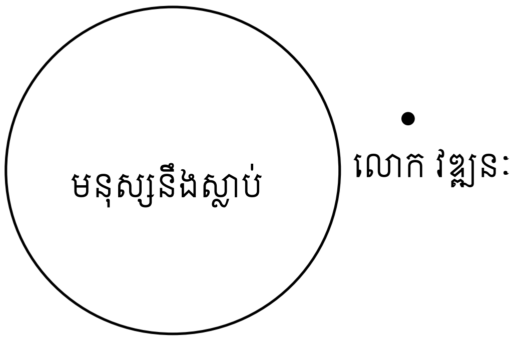
ដូច្នេះ លោក វ៉ឡូនៈ មិនមែនជាមនុស្សលោកទេ។

ចម្លើយ

ជាដំបូង យើងសង់ដ្យាក្រាមពីរផ្សេងគ្នាសម្រាប់តាងសម្មតិកម្មទាំងពីរ។

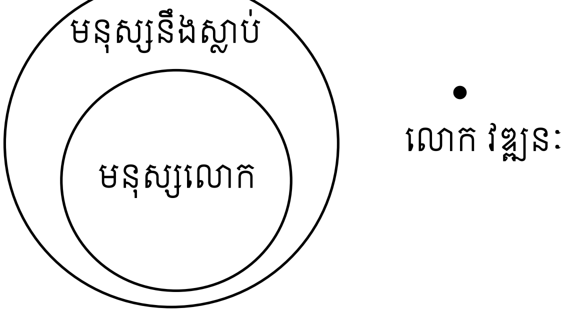


រូបទី១ៈ សម្មតិកម្មទី១



រូបទី២ៈ សម្មតិកម្មទី២

បន្ទាប់មក យើងដាក់ដ្យាក្រាមទាំងពីរឱ្យសមទៅជាដ្យាក្រាមមួយខាងក្រោមៈ



រូបទី៣

ដោយសារចំណុច លោក វ៉ឡូនៈ នៅខាងក្រៅថាស មនុស្សនឹងស្លាប់ នោះវាចាំបាច់នៅខាងក្រៅថាស មនុស្សលោក។ ដូចនេះ ការពិតនៃសេចក្តីសន្និដ្ឋានទៅតាមភាពចាំបាច់ពីការពិតនៃសម្មតិកម្មទាំងពីរ។ វាមិនអាចមានទេដែលសម្មតិកម្មនៃវិចារនេះពិតនិងសេចក្តីសន្និដ្ឋានមិនពិត ដូច្នេះ វិចារនេះត្រឹមត្រូវ។

ឧទាហរណ៍ ចូរវិភាគនូវវិចារដូចតទៅៈ

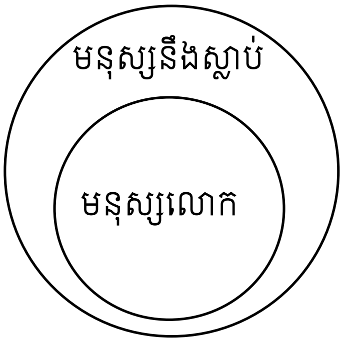
មនុស្សលោកគ្រប់គ្នាអាចបណ្ដាលឱ្យស្លាប់។

លោក សុខបរម អាចបណ្ដាលឱ្យស្លាប់។

ដូច្នេះ លោក សុខបរម ជាមនុស្សលោក។

ចម្លើយ

ជាដំបូង យើងសង់ដ្យាក្រាមពីរផ្សេងគ្នាសម្រាប់តាងសម្មតិកម្មទាំងពីរ។

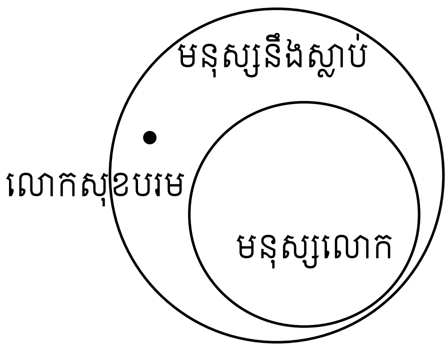


រូបទី៤ៈ សម្មតិកម្មទី១

រូបទី៥ៈ សម្មតិកម្មទី២

បន្ទាប់មក យើងឃើញថា ចំណុច លោក សុខបរម គឺអាចដៅបានត្រង់គ្រប់ទីកន្លែងនៅខាងក្នុងថាស មនុស្សនឹងស្លាប់។ ចំណុចនេះមិនអាចកំណត់ទីតាំងបានដើម្បីឱ្យផ្ទៀងផ្ទាត់ថាស មនុស្សលោក។ យើងមានពីរករណីកើតមានឡើងដូចមានបង្ហាញក្នុងរូបខាងក្រោមៈ

រូបទី៦ៈ ករណីទី១



រូបទី៧ៈ ករណីទី២

សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន « លោកសុខបរម ជាមនុស្សលោក » ជាបកាសន៍ពិតក្នុងករណីទី១ ប៉ុន្តែវាមិនពិតទេក្នុងករណីទី២ ពីព្រោះជាឧទាហរណ៍ថា លោកសុខបរម អាចជាសត្វឆ្មា។ ដោយសារតែ សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន មិនមានភាពចាំបាច់ទៅតាមពីសម្មតិកម្មទាំងពីរ ដូច្នេះ វិចារនេះមិនត្រឹមត្រូវទេ។

ប្រតិបត្តិ

ចូរកំណត់សុពលភាពនៃវិចារដូចតទៅ៖

មនុស្សលោកគ្រប់គ្នាអាចមានជំងឺ។

លោក សៅ មិនមានជំងឺទេ។

ដូចនេះ លោក សៅ ជាមនុស្សលោក។

១.១០ ការពិតក្នុងគណិតវិទ្យា និង អំណះអំណាង

១.១០.១ ការពិតក្នុងគណិតវិទ្យា

ការពិតនៅក្នុងគណិតវិទ្យា មិនមែនជាការពិតដាច់ខាតនោះទេ តែវាជាការពិតដែលអាចផ្លាស់ប្តូរទៅតាមទ្រឹស្តីប៉ុណ្ណោះ។

ឧទាហរណ៍

ក. នៅក្នុងទ្រឹស្តីមួយដែលគេសន្មតថា « មនុស្សភរ ជាមនុស្សដែលមិនដែលនិយាយការពិតទាល់តែសោះ » នោះបកាសន៍ $P \equiv$ « ចរិយានិយាយថាខ្លួនជាមនុស្សភរ » បញ្ជាក់ថា ចរិយា ជាមនុស្សមិនភរទៅវិញ។

ខ. នៅក្នុងទ្រឹស្តីមួយដែលគេសន្មតថា « មនុស្សភរ ជាមនុស្សដែលមិននិយាយការពិតជានិច្ចនោះទេ » នោះបកាសន៍ $P \equiv$ « ចរិយានិយាយថាខ្លួនជាមនុស្សភរ » បញ្ជាក់ថា ចរិយា ជាមនុស្សភរទៅវិញ។

ឧទាហរណ៍ តើបកាសន៍ « សុជាតានិយាយថាខ្លួនកំពុងនិយាយកុហក » មានតម្លៃតក្កវិទ្យាច្បាស់លាស់ទេ ?

ចម្លើយ

យើងមិនអាចឱ្យតម្លៃតក្កវិទ្យាច្បាស់លាស់ទៅបកាសន៍ « សុជាតានិយាយថាខ្លួនកំពុងនិយាយកុហក » ទេ ពីព្រោះ

ក. ប្រសិនបើសុជាតានិយាយពិតនោះ សុជាតាកំពុងកុហកមែន

ខ. ប្រសិនបើសុជាតានិយាយមិនពិតនោះ សុជាតាមិនកំពុងកុហកទេ។

ឧទាហរណ៍ នៅក្នុងទ្រឹស្តីមួយ គេឱ្យនិយមន័យអំពីមនុស្សភរដូចតទៅនេះ « មនុស្សភរ ជាមនុស្សដែលមិនដែលនិយាយការពិតទាល់តែសោះ »។ បើចរិយានិយាយថា « ខ្លួន ជាមនុស្សភរ » ចូរបង្ហាញថា ចរិយាមិនមែនជាមនុស្សភរទេ។

ចម្លើយ

យើងមានករណីពីរកើតឡើង៖

ក. បើបកាសន៍ « ចរិយានិយាយថា ខ្លួន ជាមនុស្សភរ » ពិត នោះចរិយានិយាយការពិត។

តែមនុស្សភរមិនដែលនិយាយការពិតទាល់តែសោះ។
ដូច្នេះ ចរិយាដែលនិយាយការពិតនេះ មិនមែនជាមនុស្សភរទេ។

ខ. បើបកាសន៍ << ចរិយានិយាយថា ខ្លួន ជាមនុស្សភរ >> មិនពិត នោះចរិយាមិនមែន ជាមនុស្សភរទេ។
ដូចនេះ ក្នុងគ្រប់ករណី ចរិយាមិនមែនជាមនុស្សភរទេ។

ប្រតិបត្តិ

នៅក្នុងទ្រឹស្តីមួយ គេឱ្យនិយមន័យអំពីមនុស្សភរដូចតទៅនេះ << មនុស្សភរ ជាមនុស្សដែលមិននិយាយការពិតជានិច្ចនោះទេ >> ។ បើសុភ័ក្រ្តនិយាយថា << ខ្លួន ជាមនុស្សភរ >> ចូរបង្ហាញថា សុភ័ក្រ្ត ជាមនុស្សភរមែន។

១.១០.២ អំណះអំណាង [៥]

នៅក្នុងគណិតវិទ្យា យើងនិយាយតែអំពីអំណះអំណាងដែល ឬមួយពិត ឬមួយមិនពិត។ ប៉ុន្តែនៅក្នុងការរស់នៅមានអំណះអំណាងផ្សេងៗពីនេះទៅទៀតគឺ អំណះអំណាងមានទំនាស់ និង អំណះអំណាងមិនអាចសម្រេចបាន។

ក. អំណះអំណាងមានទំនាស់

យើងថាអំណះអំណាង E មួយ ជា**អំណះអំណាងមានទំនាស់** លុះត្រាតែ E និង $\neg E$ ពិតជាមួយគ្នា។

ឧទាហរណ៍

នៅក្នុងល្បែងបៀ បើគេសន្មតថា បើអ្នកលេងពីរនាក់ហូតបៀម្នាក់មួយសន្លឹក ហើយបើបៀរបស់នរណាស្មើនឹងបៀរបស់អ្នកម្នាក់ទៀត នោះអ្នកលេងនឹងឈ្នះ។
នោះយើងបាន

បើអ្នកលេង J_1 ទាញបាន << 8 គ្រាប់កឺ >> ហើយអ្នកលេង J_2 ទាញបាន << 8 គ្រាប់ដួង >> នោះអំណះអំណាង $E \equiv$ << អ្នកលេង J_1 ឈ្នះ >> ជាអំណះអំណាងមានទំនាស់។

ខ. អំណះអំណាងមិនអាចសម្រេចបាន

យើងថាអំណះអំណាង F មួយ ជា**អំណះអំណាងមិនអាចសម្រេចបាន** លុះត្រាតែ F និង $\neg F$ មិនពិតទាំងពីរ។

ឧទាហរណ៍

នៅក្នុងល្បែងបៀដដែល បើគេសន្មតថា បៀរបស់អ្នកលេងណាធំជាងបៀម្នាក់ទៀតដោយដាច់ខាត នោះអ្នកលេងនឹងឈ្នះ។
នោះយើងបាន

[៥] គណៈកម្មាធិការជាតិអេចិន្រ្តៃយនៃខេមរយានកម្មសិក្សា <<*គណិតវិទ្យា៖ ពីជគណិត*>> (ទីបញ្ចប់ ភាគ I) ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រពិសោធ ឆ្នាំ១៩៧៣។

បើអ្នកលេង J_1 ទាញបាន « 8 គ្រាប់កឺ » ហើយអ្នកលេង J_2 ទាញបាន « 7 គ្រាប់ដួង » នោះ អំណះអំណាង $F \equiv$ « អ្នកលេង J_1 ឈ្នះ » ជាអំណះអំណាងមិនអាចសម្រេចបាន។

ប្រតិបត្តិ

នៅក្នុងល្បែងបៀ បើគេសន្មតថា មានអ្នកលេងពីរនាក់ហូតបៀម្នាក់មួយសន្លឹក ហើយបើបៀរបស់នរណាស្មើនឹងបៀរបស់អ្នកម្នាក់ទៀត នោះអ្នកលេងនឹងឈ្នះ។ ចូរកំណត់ថាតើអំណះអំណាងខាងក្រោមមួយណា ជាអំណះអំណាងមានទំនាស់ ឬ មិនមែន៖

ក. អំណះអំណាង $A \equiv$ « អ្នកលេង J_1 ឈ្នះ » ដោយដឹងថា អ្នកលេង J_1 ទាញបាន « 5 គ្រាប់ដួង » ហើយអ្នកលេង J_2 ទាញបាន « 3 គ្រាប់ការ៉ូ » ។

ខ. អំណះអំណាង $B \equiv$ « អ្នកលេង J_1 ឈ្នះ » ដោយដឹងថា អ្នកលេង J_1 ទាញបាន « 5 គ្រាប់ដួង » ហើយអ្នកលេង J_2 ទាញបាន « 5 គ្រាប់ការ៉ូ » ។

គ. អំណះអំណាង $C \equiv$ « អ្នកលេង J_1 ចាញ់ » ដោយដឹងថា អ្នកលេង J_1 ទាញបាន « 4 គ្រាប់ កឺ » ហើយអ្នកលេង J_2 ទាញបាន « 4 គ្រាប់ការ៉ូ » ។

ឃ. អំណះអំណាង $D \equiv$ « អ្នកលេង J_1 ចាញ់ » ដោយដឹងថា អ្នកលេង J_1 ទាញបាន « 4 គ្រាប់កឺ » ហើយអ្នកលេង J_2 ទាញបាន « 5 គ្រាប់ការ៉ូ » ។

១.១១ លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងសិក្សាអំពីដំណោះស្រាយនូវលំហាត់មួយចំនួនតែប៉ុណ្ណោះ។

១.១១.១ លំហាត់

១. គេឱ្យបកាសន៍ពីរ a : តុនេះផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញា ជាបកាសន៍មិនពិត និង b : តុនេះមានគុណភាពល្អ ជាបកាសន៍ពិត។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $a \wedge b$, $a \vee b$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $a \wedge \bar{b}$, $a \vee \bar{b}$, $\bar{a} \wedge b$, $\bar{a} \vee b$, $\bar{a} \wedge \bar{b}$, $\bar{a} \vee \bar{b}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

២. គេមានបកាសន៍ពីរគឺ p: សំណាងរៀនគណិតវិទ្យា និង q : សំណាងទៅសាលារៀន ។

ក. កំណត់បកាសន៍ $p \wedge q$, $p \vee q$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $q \to p$, $\bar{p} \to q$ និង $\bar{q} \to \bar{p}$ ។

ខ. សរសេរបកាសន៍ខាងក្រោម៖

« សំណាងរៀនគណិតវិទ្យា ឬ គាត់មិនបានទៅសាលារៀនទេ »

« សំណាងរៀនគណិតវិទ្យា តែគាត់មិនបានទៅសាលារៀនទេ »

« បើសំណាងរៀនគណិតវិទ្យា នោះគាត់ទៅសាលារៀន »

« បើសំណាងទៅសាលារៀន នោះគាត់មិនបានរៀនគណិតវិទ្យាទេ »

« បើសំណាងមិនបានរៀនគណិតវិទ្យា នោះគាត់មិនបានទៅសាលារៀនទេ »

ដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញាឈ្នាប់តក្កវិទ្យា ។

៣. គេមានបកាសន៍ពីរដូចខាងក្រោម៖

c : ការ៉េ ជាចតុកោណកែង និង d : ការ៉េ ជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥ ។

ចូរកំណត់បកាសន៍ $\bar{c}, \bar{d}, c\vee d, c\wedge d, c\to d, d\to c, \bar{d}\to\bar{c}, \bar{c}\to\bar{d}, c\leftrightarrow d$ និង $\bar{c}\leftrightarrow\bar{d}$ ហើយកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ទាំងនេះ។

៤. ចូរសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាសនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $(p\vee q)\to(p\wedge q)$ ខ. $(p\to q)\to(q\to p)$

គ. $(q\to\neg p)\leftrightarrow(p\leftrightarrow q)$ ឃ. $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow[(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)]$ ។

៥. ក. បង្ហាញថាបកាសន៍សមាស $(p\wedge(p\to q))\to q$ ជាចីរសច្ចភាព ។

ខ. បង្ហាញថាបកាសន៍សមាស $(\neg p\wedge(p\vee q))\to q$ ជាចីរសច្ចភាព ។

គ. ចូរវិភាគនូវវិចារដូចតទៅ៖

ខ្ញុំមានឆ្មាមួយ ឬ ខ្ញុំមានឆ្កែមួយ។

ខ្ញុំមិនមានឆ្មាមួយទេ។

ដូច្នេះ ខ្ញុំមានឆ្កែមួយ។

៦. ចូរសង់តារាងភាពពិតនៃបកាសន៍សមាសនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $(\neg p\leftrightarrow\neg q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)$ ខ. $[(p\to q)\to r]\to s$ ។

៧. ចូរកំណត់ថាតើបកាសន៍សមាសណាមួយខាងក្រោម ជាចីរសច្ចភាព ឬ ជាចីរអសច្ចភាព ដោយប្រើតារាងភាពពិត៖

ក. $[\bar{q}\wedge(p\to q)]\to\bar{p}$ ខ. $\overline{q\to r}\wedge r\wedge(p\to q)$

គ. $[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$ ឃ. $[(p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to r)]\to r$ ។

៨. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ខាងក្រោមចំពោះសំណុំ $\mathbb{N}$ រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង៖

ក. $\exists x, \forall y : x+y\geq 2\sqrt{xy}$ ខ. $\forall x, \exists y : x^2-5y=20$ ។

៩. នៅក្នុងទ្រឹស្តីមួយ គេឱ្យនិយមន័យអំពីមនុស្សភរដូចតទៅនេះ « មនុស្សភរ ជាមនុស្សដែលមិននិយាយការពិតជានិច្ចនោះទេ » ។ បើសុជាតានិយាយថា « ខ្លួន ជាមនុស្សភរ » ចូរបង្ហាញថា សុជាតាជាមនុស្សភរមែន។

១០. ដោយមិនប្រើតារាងភាពពិត ចូរបង្ហាញថា៖

ក. $(\neg p\vee q)\wedge(p\wedge(p\wedge q))\equiv p\wedge q$ ខ. $p\to(q\to p)\equiv\neg p\to(p\to q)$

គ. $\neg(p\leftrightarrow q)\equiv(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

$\equiv(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ ។

១១. ចូរកំណត់ថាតើសេចក្តីសន្និដ្ឋាន Q ធ្វើតាមពីសម្មតិកម្ម H_1, H_2, H_3 ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមឬយ៉ាងណា ដោយប្រើវិធីតារាងភាពពិត៖

ក. $H_1 : \neg p$, $H_2 : p \vee q$, $Q : p \wedge q$

ខ. $H_1 : p \vee q$, $H_2 : p \rightarrow r$, $H_3 : q \rightarrow r$, $Q : r$ ។

១២. បង្ហាញថាបកាសន៍ $t \wedge s$ ទាញចេញពីសម្មតិកម្ម $p \rightarrow q$, $q \rightarrow \neg r$, r , $p \vee (t \wedge s)$ ។

១.១១.២ ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់បកាសន៍ $a \wedge b$, $a \vee b$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $a \wedge \bar{b}$, $a \vee \bar{b}$, $\bar{a} \wedge b$, $\bar{a} \vee b$, $\bar{a} \wedge \bar{b}$, $\bar{a} \vee \bar{b}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. $(a) = 0$ និង ត. $(b) = 1$ ។

យើងបាន៖

$a \wedge b$: តុនេះផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញានិងមានគុណភាពល្អ ហើយ ត. $(a \wedge b) = 0$ ។

$a \vee b$: តុនេះផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញាឬមានគុណភាពល្អ ហើយ ត. $(a \vee b) = 1$ ។

$\bar{a}$: តុនេះមិនបានផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញាទេ និង ត. $(\bar{a}) = 1$ ។

$\bar{b}$: តុនេះមិនមានគុណភាពល្អទេ និង ត. $(\bar{b}) = 0$ ។

$a \wedge \bar{b}$: តុនេះផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញានិងមិនមានគុណភាពល្អទេ ហើយ ត. $(a \wedge \bar{b}) = 0$ ។

$a \vee \bar{b}$: តុនេះផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញាឬមិនមានគុណភាពល្អទេ ហើយ ត. $(a \vee \bar{b}) = 0$ ។

$\bar{a} \wedge b$: តុនេះមិនបានផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញាទេនិងមានគុណភាពល្អ ហើយ ត. $(\bar{a} \wedge b) = 1$ ។

$\bar{a} \vee b$: តុនេះមិនបានផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញាទេឬមានគុណភាពល្អ ហើយ ត. $(\bar{a} \vee b) = 1$ ។

$\bar{a} \wedge \bar{b}$: តុនេះមិនបានផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញាទេនិងមិនមានគុណភាពល្អទេ ហើយ ត. $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = 0$ ។

$\bar{a} \vee \bar{b}$: តុនេះមិនបានផលិតដោយក្រុមហ៊ុនបញ្ញាទេឬមិនមានគុណភាពល្អទេ ហើយ ត. $(\bar{a} \vee \bar{b}) = 1$ ។

២. ក. កំណត់បកាសន៍ $p \wedge q$, $p \vee q$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $q \to p$, $\bar{p} \to q$ និង $\bar{q} \to \bar{p}$ ។

យើងបាន៖

$p \wedge q$: សំណាងរៀនគណិតវិទ្យា និង គាត់ទៅសាលារៀន ។

$p \vee q$: សំណាងរៀនគណិតវិទ្យា ឬ គាត់ទៅសាលារៀន ។

$\bar{p}$: សំណាងមិនបានរៀនគណិតវិទ្យាទេ ។

$\bar{q}$: សំណាងមិនបានទៅសាលារៀនទេ ។

$q \to p$: បើសំណាងទៅសាលារៀន នោះគាត់រៀនគណិតវិទ្យា ។

$\bar{p} \to q$: បើសំណាងមិនបានរៀនគណិតវិទ្យាទេ នោះគាត់ទៅសាលារៀន ។

$\bar{q} \to \bar{p}$: បើសំណាងមិនបានទៅសាលារៀន នោះគាត់មិនបានរៀនគណិតវិទ្យាទេ ។

ខ. សរសេរបកាសន៍ដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញាឈ្នាប់តក្កវិទ្យាគឺ

$p \vee \bar{q}$, $p \wedge \bar{q}$, $p \to q$, $q \to \bar{p}$ និង $\bar{p} \to \bar{q}$ ។

៣. កំណត់បកាសន៍ $\bar{c}$, $\bar{d}$, $c \vee d$, $c \wedge d$, $c \to d$, $d \to c$, $\bar{d} \to \bar{c}$, $\bar{c} \to \bar{d}$, $c \leftrightarrow d$, $\bar{c} \leftrightarrow \bar{d}$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

យើងមាន ត. $(c) = 1$ និង ត. $(d) = 0$ ។

យើងបាន៖

$\bar{c}$: ការ៉េ មិនមែនជាចតុកោណកែងទេ និង ត. $(\bar{c}) = 0$ ។

$\bar{d}$: ការ៉េ មិនមែនជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥ទេ និង ត. $(\bar{d}) = 1$ ។

$c \vee d$: ការ៉េ ជាចតុកោណកែង ឬ ជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥ ហើយ ត. $(c \vee d) = 1$ ។

$c \wedge d$: ការ៉េ ជាចតុកោណកែង និង ជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥ ហើយ ត. $(c \wedge d) = 0$ ។

$c \to d$: បើការ៉េ ជាចតុកោណកែង នោះវាជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥ ហើយ ត. $(c \to d) = 0$ ។

$d \to c$: បើការ៉េ ជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥ នោះវាជាចតុកោណកែង ហើយ ត. $(d \to c) = 1$ ។

$\bar{d} \to \bar{c}$: បើការ៉េ មិនមែនជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥ នោះវាមិនមែនជាចតុកោណកែងទេ
ហើយ ត. $(\bar{d} \to \bar{c}) = 0$ ។

$\bar{c} \to \bar{d}$: បើការ៉េ មិនមែនជាចតុកោណកែង នោះវាមិនមែនជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥ទេ
ហើយ ត. $(\bar{c} \to \bar{d}) = 1$ ។

$c \leftrightarrow d$: ការ៉េ ជាចតុកោណកែង លុះត្រាតែ ជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥
ហើយ ត. $(c \leftrightarrow d) = 0$ ។

$\bar{c} \leftrightarrow \bar{d}$: ការ៉េ មិនមែនជាចតុកោណកែង សមមូល វាមិនមែនជាចតុកោណដែលមានជ្រុង៥
ហើយ ត. $(\bar{c} \leftrightarrow \bar{d}) = 0$ ។

៤. ក. តារាងភាពពិតនៃ $(p \vee q) \to (p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

ខ. តារាងភាពពិតនៃ $(p \to q) \to (q \to p)$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

គ. តារាងភាពពិតនៃ $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$q \to \neg p$	$p \leftrightarrow q$	$(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1

ឃ. តារាងភាពពិតនៃ $A \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	A
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1

៥. ក. បង្ហាញថា $(p \wedge (p \to q)) \to q$ ជាបឺរសច្ចភាព ។

តារាងភាពពិតនៃ $(p \wedge (p \to q)) \to q$

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $(p \wedge (p \to q)) \to q$ ជាបឺរសច្ចភាព ។

ខ. បង្ហាញថាបកាសន៍សមាស $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$ ជាបឺរសច្ចភាព ។

តារាងភាពពិតនៃ $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$ ជាបឺរសច្ចភាព ។

គ. វិភាគនូវវិចារ។

ដើម្បីវិភាគនូវវិចារនេះ យើងត្រូវកំណត់បកាសន៍ដូចតទៅ៖

p : ខ្ញុំមានឆ្មាមួយ ។

q : ខ្ញុំមានឆ្កែមួយ។

យើងបានវិចារនេះគឺ $P_1 , P_2 \vdash Q$

ដែលបកាសន៍សមាស $P_1 \equiv p \vee q, P_2 \equiv \neg p$ ជាសម្មតិកម្មពីរ និង $Q \equiv q$ ជាសេចក្តីសន្និដ្ឋាន។

យើងបង្កើតបកាសន៍សមាស $E \equiv (P_1 \wedge P_2) \to Q \equiv [(p \vee q) \wedge \neg p] \to q \equiv [\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$ និង តាមសំណួរ ខ. យើងបាន E ជាចីរសច្ចភាព ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី៤ ដូចនេះ វិចារ $P_1 , P_2 \vdash Q$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

សម្គាល់

១. បកាសន៍សមាស $(p \wedge (p \to q)) \to q$ ជាចីរសច្ចភាព ឬ $(p \wedge (p \to q)) \to q \equiv t$ ។ វាហៅថា លក្ខណៈ Modus ponens ។

២. បកាសន៍សមាស $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$ ជាចីរសច្ចភាព ឬ $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q \equiv t$ ។ វាហៅថា ឈ្នាប់ឬស៊ីឡូ ។

៦. ក. តារាងភាពពិតនៃ $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$q \leftrightarrow r$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

ខ. តារាងភាពពិតនៃ $[(p \to q) \to r] \to s$

p	q	r	s	$p \to q$	$(p \to q) \to r$	$[(p \to q) \to r] \to s$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

៧. ក. តារាងភាពពិតនៃ $[\bar{q} \wedge (p \to q)] \to \bar{p}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \to q$	$\bar{q} \wedge (p \to q)$	$[\bar{q} \wedge (p \to q)] \to \bar{p}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $[\bar{q} \wedge (p \to q)] \to \bar{p}$ ជាចីរសច្ចភាព ។

ខ. តារាងភាពពិតនៃ $\overline{q \to r} \wedge r \wedge (p \to q)$

p	q	r	$q \to r$	$p \to q$	$\overline{q \to r}$	$\overline{q \to r} \wedge r$	$\overline{q \to r} \wedge r \wedge (p \to q)$
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0

ដោយជួរឈរទី៨នៃតារាងភាពពិតមានតម្លៃភាពពិត 0 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $\overline{q \to r} \wedge r \wedge (p \to q)$ ជាចីរអេសច្ចភាព ។

គ. តារាងភាពពិតនៃ $B \equiv [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	B
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $B \equiv [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ ជាចីរសច្ចភាព ។

ឃ. តារាងភាពពិតនៃ $C \equiv [(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)$	C
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1

ដោយជួរឈរទី៨នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យបកាសន៍សមាស $C \equiv [(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$ ជាចីរសច្ចភាព ។

៨. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃបកាសន៍ រួចដាក់ឈ្នាប់មិនលើវាផង។

ក. បកាសន៍ $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ជាបកាសន៍ពិតតាមវិសមភាពកូស៊ី។

ឈ្នាប់មិនលើបកាសន៍ $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y \geq 2\sqrt{xy}$ គឺ

$$\neg[\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y \geq 2\sqrt{xy}] \equiv \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : \neg(x + y \geq 2\sqrt{xy})$$
$$\equiv \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y < 2\sqrt{xy}$$ ។

ខ. បកាសន៍ $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} :\ x^2 - 5y = 20$ ជាបកាសន៍មិនពិត

ពីព្រោះ $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y = 2 \in \mathbb{N} :\ x^2 - 5y = x^2 - 5(2) = x^2 - 10 \neq 20$ ។

ឈ្នាប់មិនលើបកាសន៍ $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} :\ x^2 - 5y = 20$ គឺ

$$\neg[\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} :\ x^2 - 5y = 20] \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : \neg(x^2 - 5y = 20)$$
$$\equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} :\ x^2 - 5y \neq 20$$ ។

៩. បង្ហាញថា សុជាតា ជាមនុស្សភរមែន។

យើងមានករណីពីរកើតឡើង៖

ក. បើបកាសន៍ « សុជាតានិយាយថា ខ្លួន ជាមនុស្សភរ » ពិត នោះសុជាតា ជាមនុស្សភរមែន។

ខ. បើបកាសន៍ « សុជាតានិយាយថា ខ្លួន ជាមនុស្សភរ » មិនពិត នោះសុជាតា ជាមនុស្សដែលមិននិយាយការពិតជានិច្ចនោះទេ។ តាមនិយមន័យ សុជាតា ជាមនុស្សភរ។

ដូចនេះ ក្នុងគ្រប់ករណី សុជាតា ជាមនុស្សភរមែន។

១០. ក. ស្រាយថា $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q)) \equiv p \wedge q$ ។

តាមលក្ខណៈនៃទ្រឹស្តីបទទី៣ យើងបាន៖

$(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q)) \equiv (\neg p \vee q) \wedge ((p \wedge p) \wedge q))$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \wedge q)$ (លក្ខណៈអ៊ីដឹមប៉ូតង់)

$\equiv (p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$\equiv ((p \wedge q) \wedge \neg p) \vee ((p \wedge q) \wedge q)$ (លក្ខណៈបំបែក)

$\equiv ((p \wedge \neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (q \wedge q)$ (លក្ខណៈផ្តុំនិងត្រឡប់)

$\equiv (f \wedge q) \vee (p \wedge q)$ (លក្ខណៈបំពេញនិងអ៊ីដឹមប៉ូតង់)

$\equiv f \vee (p \wedge q)$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)

$\equiv p \wedge q$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង) ។

ដូចនេះ យើងបាន $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q)) \equiv p \wedge q$ ។

ខ. ស្រាយថា $p \to (q \to p) \equiv \neg p \to (p \to q)$ ។

តាមលក្ខណៈនៃទ្រឹស្តីបទទី៣ យើងបាន៖

$p \to (q \to p) \equiv \neg p \vee (q \to p)$ (លក្ខណៈបណ្តាល)

$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee p)$ (លក្ខណៈបណ្តាល)

$\equiv \neg q \vee (p \vee \neg p)$ (លក្ខណៈត្រឡប់និងផ្តុំ)

$\equiv \neg q \vee t$ (លក្ខណៈបំពេញ)

$\equiv t$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង) (1)

និង $\neg p \to (p \to q) \equiv p \vee (p \to q)$ (លក្ខណៈបណ្តាល)

$\equiv p \vee (\neg p \vee q)$ (លក្ខណៈបណ្តាល)

$\equiv (p \vee \neg p) \vee q$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

$\equiv t \vee q$ (លក្ខណៈបំពេញ)

$\equiv t$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង) (2) ។

ដូចនេះ តាម (1) និង (2) យើងបាន $p \to (q \to p) \equiv \neg p \to (p \to q)$ ។

គ. ស្រាយថា $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ។

តាមលក្ខណៈនៃទ្រឹស្តីបទទី៣ យើងបាន៖

$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg((p \to q) \wedge (q \to p))$ (លក្ខណៈសមមូល)

$\equiv \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$ (លក្ខណៈដឺម៉កង់)

$\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)$ (លក្ខណៈបណ្តាល)

$\equiv (\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee (\neg(\neg q) \wedge \neg p)$ (លក្ខណៈដឺម៉កង់)

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ (លក្ខណៈអាំងវ៉ូលុយស្យុង)

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ (លក្ខណៈត្រឡប់) (3)

និង $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)$ (លក្ខណៈបំបែក)

$\equiv ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \wedge ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q))$ (លក្ខណៈបំបែក)

$\equiv (t \wedge (\neg q \vee \neg p)) \wedge ((p \vee q) \wedge t)$ (លក្ខណៈបំពេញ)

$\equiv (\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)

$\equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$\equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ (លក្ខណៈដឺម៉កង់) (4) ។

ដូចនេះ តាម (3) និង (4) យើងបាន

$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ។

១១. ចូរកំណត់ថាតើសេចក្តីសន្និដ្ឋាន Q ធ្វើតាមពីសម្មតិកម្ម H_1, H_2, H_3 ឬយ៉ាងណា។

ក. យើងសង់តារាងភាពពិតនៃ $H_1 : \neg p$, $H_2 : p \vee q$, $H_1 \wedge H_2$, $Q : p \wedge q$ ។

p	q	$H_1 \equiv \neg p$	$H_2 \equiv p \vee q$	$H_1 \wedge H_2$	$Q \equiv p \wedge q$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0

ពីជួរដេកទី៣នៃតារាងភាពពិតខាងលើ យើងឃើញថា H_1, H_2 ជាបកាសន៍ពិត នោះ $H_1 \wedge H_2$ ជាបកាសន៍ពិត តែ Q ជាបកាសន៍មិនពិត។ ដូចនេះ Q មិនធ្វើតាមពីសម្មតិកម្ម H_1 និង H_2 ទេ។

ខ. យើងសង់តារាងភាពពិតនៃ $H_1 : p \vee q$, $H_2 : p \to r$, $H_3 : q \to r$, $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$, $Q : r$ ។

p	q	r	$H_1 \equiv p \vee q$	$H_2 \equiv p \to r$	$H_3 \equiv q \to r$	$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$	$Q \equiv r$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0

ពីជួរដេកទី១ ទី៣និងទី៥នៃតារាងភាពពិតខាងលើ យើងឃើញថា H_1, H_2 និង H_3 ជាបកាសន៍ពិត នាំឱ្យ $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$ ជាបកាសន៍ពិត ក្នុងករណីដែល Q ជាបកាសន៍ពិតដែរ។ ដូចនេះ Q ធ្វើតាមពីសម្មតិកម្ម H_1, H_2 និង H_3 ។

១២. ស្រាយថាបកាសន៍ $t \wedge s$ ទាញចេញពីសម្មតិកម្ម $p \to q$, $q \to \neg r$, r , $p \vee (t \wedge s)$ ។

ជំហាន	**បកាសន៍**	**ហេតុផល**
១.	$p \to q$	P (សម្មតិកម្ម)
២.	$q \to \neg r$	P
៣.	$p \to \neg r$	ពិតតាម ១ , ២ និង សម្មតិកម្មស៊ីឡូ
៤.	$r \to \neg p$	ពិតតាម ៣ និង លក្ខណៈផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម
៥.	r	P
៦.	$\neg p$	ពិតតាម ៤ , ៥ និង លក្ខណៈ Modus ponens
៧.	$p \vee (t \wedge s)$	P
៨.	$t \wedge s$	ពិតតាម ៦ , ៧ និង ឈ្នាប់ឬស៊ីឡូ ។

ដូចនេះ បកាសន៍ $t \wedge s$ ទាញចេញពីសម្មតិកម្ម $p \to q$, $q \to \neg r$, r , $p \vee (t \wedge s)$ ។

ជំពូកទី ២

ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងការសម្រាយបំភ្លឺ

Using Logic for Proofs

នៅក្នុងជំពូកទី២នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងការសម្រាយបំភ្លឺនៃបញ្ហាមួយចំនួនក្នុងគណិតវិទ្យាដូចតទៅៈ

២.១ វិធីនាំឱ្យ

បើបកាសន៍ $[H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)]$ ពិត នោះគេទាញបានបកាសន៍ H_2 ពិត មានន័យថា គេបានវិចារ $[H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)] \vdash H_2$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើបកាសន៍ $[H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)]$ ពិត យើងបានបកាសន៍ H_1 ពិត និង $H_1 \rightarrow H_2$ ពិត ។

នាំឱ្យបកាសន៍ H_2 ពិត ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងបង្កើតបកាសន៍ $[H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)] \rightarrow H_2$ និងសង់តារាងភាពពិតរបស់វាខាងក្រោមៈ

H_1	H_2	$H_1 \rightarrow H_2$	$H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)$	$[H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)] \rightarrow H_2$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យ
បកាសន៍ $[H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)] \rightarrow H_2$ ជាបកាសន៍ Tautology ។
ដូចនេះ វិចារ $[H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)] \vdash H_2$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបកាសន៍ H_1 : ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A
និង H_2 : មេដ្យាន [AN] ជាកម្ពស់។

យើងមានបកាសន៍ $[H_1 \wedge (H_1 \rightarrow H_2)]$ ពិត នោះយើងទាញបានបកាសន៍ H_2 ពិត។

២.២ វិធីស៊ីឡូ

បើបកាសន៍ $[(H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_3)]$ ពិត នោះគេទាញបានបកាសន៍ $H_1 \to H_3$ ពិត មានន័យថា គេបានវិចារ $[(H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_3)] \vdash (H_1 \to H_3)$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងបង្កើតបកាសន៍ $A \equiv [(H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_3)] \to (H_1 \to H_3)$ និង សង់តារាងភាពពិតរបស់វាខាងក្រោម៖

H_1	H_2	H_2	$H_1 \to H_2$	$H_2 \to H_3$	$H_1 \to H_3$	$(H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_3)$	A
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

ដោយជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិត 1 ទាំងអស់ នាំឱ្យ បកាសន៍ A ជាបកាសន៍ Tautology ។
ដូចនេះ វិចារ $[(H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_3)] \vdash (H_1 \to H_3)$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ មានន័យថា បើបកាសន៍ $[(H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_3)]$ ពិត នោះគេទាញបានបកាសន៍ $H_1 \to H_3$ ពិត។

ឧទាហរណ៍ គេតាងបកាសន៍ H_1 : អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ x_0, H_2 : អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ x_0 និង H_3 : អនុគមន៍ f មានលីមីតត្រង់ x_0 ។

យើងមានបកាសន៍ $(H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_3)$ ពិត នោះយើងទាញបានបកាសន៍ $H_1 \to H_3$ ពិត ។

២.៣ វិធីសិក្សាបែងចែកជាករណី

បើបកាសន៍ $[(H_1 \to H_2) \wedge (\neg H_1 \to H_2)]$ ពិត នោះគេទាញបានបកាសន៍ H_2 ពិត មានន័យថា គេបានវិចារ $[(H_1 \to H_2) \wedge (\neg H_1 \to H_2)] \vdash H_2$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើបកាសន៍ $[(H_1 \to H_2)\wedge(\neg H_1 \to H_2)]$ ពិត យើងបានបកាសន៍ $H_1 \to H_2$ ពិត និង $\neg H_1 \to H_2$ ពិត។ ចំពោះបកាសន៍ H_1 អាចជាបកាសន៍ពិត ឬក៏មិនពិត។

- ប្រសិនបើបកាសន៍ H_1 ពិត និងដោយបកាសន៍ $H_1 \to H_2$ ពិត

នោះយើងទាញបានបកាសន៍ H_2 ពិត។

- ប្រសិនបើបកាសន៍ H_1 មិនពិត នាំឱ្យបកាសន៍ $\neg H_1$ ពិត និងដោយបកាសន៍ $\neg H_1 \to H_2$ ពិត

នោះយើងទាញបានបកាសន៍ H_2 ពិត។

ដូចនេះ ក្នុងគ្រប់ករណី យើងបានបកាសន៍ H_2 ពិត មានន័យថា យើងបានវិចារ $[(H_1 \to H_2)\wedge(\neg H_1 \to H_2)] \vdash H_2$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ។

ចម្លើយ

ស្រាយថា $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ។

យើងមាន $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ។

យើងសិក្សាបែងចែកជាពាករណីដូចខាងក្រោម៖

- បើ $n = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$ យើងបាន $n = 3k$ ចែកដាច់នឹង 3 និងនាំឱ្យ $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 3 ។
- បើ $n = 3k+1,\ k \in \mathbb{Z}$ យើងបាន $n - 1 = 3k$ ចែកដាច់នឹង 3 និងនាំឱ្យ $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 3។
- បើ $n = 3k+2,\ k \in \mathbb{Z}$ យើងបាន $n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 3 និងនាំឱ្យ $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 3។

ជាសរុប យើងបាន $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. ចូរស្រាយតាមវិធីសិក្សាបែងចែកជាករណីថា $n^2 + n$ ចែកដាច់នឹង 2 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ។

២. ចូរស្រាយតាមវិធីសិក្សាបែងចែកជាករណីថា $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 6 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

២.៤ វិធីសម្រាយផ្ទាល់

ក្នុងវិធីសម្រាយផ្ទាល់ យើងចាប់ផ្តើមជាមួយសម្មតិកម្មនៃបកាសន៍មួយ និងធ្វើការទាញផលឱ្យទៅដល់សេចក្តីសន្និដ្ឋាន។

វិធីសម្រាយផ្ទាល់មានជំហានដូចតទៅៈ

១. សរសេរបកាសន៍ដើម្បីបង្ហាញជាទម្រង់ « $\forall x \in D$, ប្រសិនបើ $P(x)$ នោះ $Q(x)$ » ។

២. ចាប់ផ្តើមស្រាយបញ្ជាក់ដោយឧបមាថា x ជាធាតុពិសេស ប៉ុន្តែគេអាចជ្រើសរើសវាបានតាមចិត្តនៃ D ដែលធ្វើឱ្យ $P(x)$ ពិត។

៣. បង្ហាញថា សេចក្តីសន្និដ្ឋាន $Q(x)$ ពិតតាមការប្រើប្រាស់និយមន័យលទ្ធផលដែលមានពីមុន និងក្បួនសម្រាប់ការពិចារណាតាមបែបតក្កវិទ្យា។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា ផលបូកនៃពីរចំនួនគត់គូណាក៏ដោយ ជាចំនួនគត់គូ។

ចម្លើយ

ឧបមាថា m និង n ជាពីរចំនួនគត់គូ នោះយើងត្រូវតែបង្ហាញថា $m+n$ ជាចំនួនគត់គូ។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ នោះមាន $r \in \mathbb{Z}$ និង $s \in \mathbb{Z}$ ដែល $m = 2r$ និង $n = 2s$ ។

នាំឱ្យ

$$m+n = 2r+2s = 2(r+s) = 2k$$

ដែល $k = r+s \in \mathbb{Z}$ ពីព្រោះ $r \in \mathbb{Z}$ និង $s \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ នាំឱ្យ $m+n$ ជាចំនួនគត់គូ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា ផលបូកនៃចំនួនគត់គូ និង ចំនួនគត់សេសណាក៏ដោយ ជាចំនួនគត់សេស។

ចម្លើយ

ឧបមាថា m ជាចំនួនគត់គូណាមួយ និង n ជាចំនួនគត់សេសណាមួយដែរ នោះយើងត្រូវតែបង្ហាញថា $m+n$ ជាចំនួនគត់សេស។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ និង ចំនួនគត់សេស

នោះមាន $r \in \mathbb{Z}$ និង $s \in \mathbb{Z}$ ដែល $m = 2r$ និង $n = 2s+1$ ។

នាំឱ្យ

$$m+n = 2r+2s+1 = 2(r+s)+1 = 2k+1$$

ដែល $k = r+s \in \mathbb{Z}$ ពីព្រោះ $r \in \mathbb{Z}$ និង $s \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់សេស នាំឱ្យ $m+n$ ជាចំនួនគត់សេស។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា ផលបូកនៃពីរចំនួនសនិទានណាក៏ដោយ ជាចំនួនសនិទាន។ រួចទាញថា ចំពោះចំនួនសនិទាន r និង s ណាក៏ដោយ នោះគេបាន $2r+3s$ ក៏ជាចំនួនសនិទានផងដែរ។

ចម្លើយ

ក. ឧបមាថា r និង s ជាពីរចំនួនសនិទាន។ យើងត្រូវតែបង្ហាញថា $r+s$ ជាចំនួនសនិទាន។
តាមនិយមន័យនៃចំនួនសនិទាន នោះមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a, b, c, d និង $b\neq 0$, $d\neq 0$ ដែល $r=\frac{a}{b}$ និង $s=\frac{c}{d}$ ។

នាំឱ្យ

$$r+s=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{p}{q}$$

ដែល $p=ad+bc\in\mathbb{Z}, q=bd\in\mathbb{Z}$ និង $q\neq 0$

ពីព្រោះ a, b, c, d ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង $b\neq 0, d\neq 0$ ។
ដូចនេះ តាមនិយមន័យនៃចំនួនសនិទាន នាំឱ្យ $r+s$ ជាចំនួនសនិទាន។

ខ. ទាញថាចំនួន $2r+3s$ ជាចំនួនសនិទាន។
យើងមាន $2r=r+r$ និង $2s=s+s$ ជាផលបូកនៃពីរចំនួនសនិទាន នោះតាមការសម្រាយខាងលើ នាំឱ្យ $2r$ និង $2s$ ជាចំនួនសនិទាន។ នាំឱ្យ $3s=2s+s$ ក៏ជាចំនួនសនិទាន។
ដូចនេះ ចំនួន $2r+3s$ ជាចំនួនសនិទាន។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a, b និង c ប្រសិនបើ $a|b$ និង $b|c$ នោះគេបាន $a|c$ ។

ចម្លើយ

ឧបមាថា a, b និង c ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $a|b$ និង $b|c$។
យើងត្រូវតែបង្ហាញថា $a|c$ ។
តាមនិយមន័យនៃភាពចែកដាច់ នាំឱ្យមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប r និង s
ដែល $b=ar$ និង $c=bs$ ។
តាមការជំនួស យើងបាន

$$c=bs=(ar)s=a(rs)=ak$$ ។

ដែល $k=rs\in\mathbb{Z}$ ពីព្រោះ $r\in\mathbb{Z}$ និង $s\in\mathbb{Z}$ ។
ដូចនេះ តាមនិយមន័យនៃភាពចែកដាច់ យើងបាន $a|c$ ។

សម្គាល់

និមិត្តសញ្ញា $x|y$ អានថា « x ចែក y ដាច់ » ។ តាមនិមិត្តសញ្ញានេះ ប្រសិនបើ x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប នោះ $x|y \Leftrightarrow \exists$ ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប k ដែល $y=xk$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទាល់ បង្ហាញថា n^2+n ជាចំនួនគត់គូ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ។

២. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទាល់ បង្ហាញថា ផលបូកនៃពីរចំនួនគត់សេសណាក៏ដោយ ជាចំនួនគត់គូ ។

២.៥ វិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

វិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ជាវិធីសម្រាយមិនផ្ទាល់ ដែលផ្អែកលើសមមូលតក្កវិទ្យារវាងបកាសន៍មួយ និងបកាសន៍ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មឬបកាសន៍ផ្ទុយប្រាសរបស់វា។

បើបកាសន៍ $\neg H_2 \to \neg H_1$ ពិត នោះគេទាញបានបកាសន៍ $H_1 \to H_2$ ពិត មានន័យថា គេបានវិចារ $\neg H_2 \to \neg H_1 \longmapsto H_1 \to H_2$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងបង្ហាញថា $H_1 \to H_2 \equiv \neg H_2 \to \neg H_1$ ។ ឥឡូវនេះ យើងសង់តារាងភាពពិតនៃ $H_1 \to H_2$ និង $\neg H_2 \to \neg H_1$ ដូចតទៅ៖

H_1	H_2	$\neg H_1$	$\neg H_2$	$H_1 \to H_2$	$\neg H_2 \to \neg H_1$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

ដោយជួរឈរទី៥និងទី៦នៃតារាងភាពពិតខាងលើមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា នាំឱ្យបកាសន៍ $H_1 \to H_2 \equiv \neg H_2 \to \neg H_1$ ។

ដូចនេះ បើបកាសន៍ $\neg H_2 \to \neg H_1$ ពិត នោះគេទាញបានបកាសន៍ $H_1 \to H_2$ ពិត មានន័យថា គេបានវិចារ $\neg H_2 \to \neg H_1 \longmapsto H_1 \to H_2$ ជាវិចារត្រឹមត្រូវ ។

វិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្មមានជំហានដូចតទៅ៖

១. សរសេរបកាសន៍ដើម្បីបង្ហាញជាទម្រង់

« $\forall x \in D$, ប្រសិនបើ $P(x)$ នោះ $Q(x)$ » ។

២. សរសេរបកាសន៍នេះឡើវិញក្នុងទម្រង់ផ្ទុយប្រាស

<< $\forall x \in D$, ប្រសិនបើ $Q(x)$ មិនពិត នោះ $P(x)$ មិនពិត >> ។

៣. បង្ហាញថា បកាសន៍ផ្ទុយប្រាសតាមវិធីសម្រាយផ្ទាល់៖

ក. ឧបមាថា x ជាធាតុពិសេសនៃ D ប៉ុន្តែគេអាចជ្រើសរើសវាបានតាមចិត្តដែលធ្វើឱ្យ $Q(x)$ មិនពិត ។

ខ. បង្ហាញថា $P(x)$ មិនពិត ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យ (a,b) ជាគូនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង $y=a+ab+b$ ។
ស្រាយបំភ្លឺថា បើ $a\neq -1$ និង $b\neq -1$ នោះគេបាន $y\neq -1$ ។

ចម្លើយ

តាង H_1 ជាបកាសន៍ << $a\neq -1$ និង $b\neq -1$ >> និង H_2 ជាបកាសន៍ << $y\neq -1$ >> ។

យើងមាន $\neg H_2$ ជាបកាសន៍ $y=-1 \leftrightarrow a+ab+b=-1$

$\leftrightarrow a(1+b)+(1+b)=0 \leftrightarrow (a+1)(1+b)=0$

$\leftrightarrow a+1=0 \vee 1+b=0 \rightarrow a=-1 \vee b=-1$ ដែលជាបកាសន៍ $\neg H_1$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $H_1 \rightarrow H_2$ ពិត។

ឧទាហរណ៍ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប m ស្រាយបំភ្លឺតាមវិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្មថា បើ m^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះគេបាន m ជាចំនួនគត់គូ។

ចម្លើយ

ឧបមាថា m ជាចំនួនគត់សេស។ យើងត្រូវតែបង្ហាញថា m^2 ជាចំនួនគត់សេស។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់សេស នាំឱ្យមាន $k\in\mathbb{Z}$ ដែល $m=2k+1$ ។

តាមការជំនួស និង លក្ខណៈពីជគណិត នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} m^2 &= (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k)(1) + 1^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1 \\ &= 2k_1 + 1 \end{aligned}$$

ដែល $k_1 = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$ ។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់សេស យើងបាន m^2 ជាចំនួនគត់សេស។

ដូចនេះ បើ m^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ m ជាចំនួនគត់គូ។

ឧទាហរណ៍ ចំពោះចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប m និង n ស្រាយបំភ្លឺថា បើផលគុណ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 នោះទាំង m និង n ក៏មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ។

ចម្លើយ

តាង H_1 ជាបកាសន៍ « ផលគុណ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 » និង H_2 ជាបកាសន៍ « ចំនួនទាំងពីរ m និង n មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 »។

យើងមាន $\neg H_2$ ជាបកាសន៍ « ចំនួន m ឬ n ឬទាំងពីរ ជាពហុគុណនៃ 3 »។

សមមូល $m = 3k_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}$ ឬ $n = 3k_2,\ k_2 \in \mathbb{Z}$ ឬទាំងពីរ

នាំឱ្យ $mn = 3k_1 \cdot n = 3(k_1 n),\ k_1 n \in \mathbb{Z}$

ឬ $mn = m \cdot 3k_2 = 3(mk_2),\ mk_2 \in \mathbb{Z}$

ឬ $mn = 3k_1 \cdot 3k_2 = 3(3k_1 k_2),\ 3k_1 k_2 \in \mathbb{Z}$ ។

នាំឱ្យ mn ជាពហុគុណនៃ 3 ដែលជាបកាសន៍ $\neg H_1$ ។

ដូចនេះ យើងបានបកាសន៍ $H_1 \to H_2$ ពិត។

ប្រតិបត្តិ

១. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម បង្ហាញថា បើ $3n + 2$ ជាចំនួនគត់សេស នោះគេបាន n ជាចំនួនគត់សេស ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ។

២. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម បង្ហាញថា បើ $a^2 - 2a + 7$ ជាចំនួនគត់គូ នោះគេបាន a ជាចំនួនគត់សេស ចំពោះ $\forall a \in \mathbb{Z}$ ។

២.៦ វិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត

វិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត ជាវិធីសម្រាយមិនផ្ទាល់ ដែលផ្អែកលើការពិតថា បកាសន៍មួយពិត ឬវាមិនពិត ប៉ុន្តែមិនទាំងពីរទេ។

វិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិតមានជំហានដូចតទៅ៖

១. ឧបមាថាបកាសន៍មួយត្រូវបង្ហាញថាវាមិនពិត មានន័យថា ឧបមាថាឈ្នាប់មិននៃបកាសន៍នេះពិត។

២. បង្ហាញថាការឧបមានេះនាំទៅរកភាពផ្ទុយពីការពិតតាមតក្កវិទ្យា។

៣. សន្និដ្ឋានថា បកាសន៍នេះពិត។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបធំបំផុតទេ។

ចម្លើយ

យើងដាក់ឈ្នាប់មិននៃបកាសន៍ « គ្មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបធំបំផុតទេ » និងឧបមាថាវាជាបកាសន៍ពិត។

ឧបមាថាវាមិនពិត គឺថាឧបមាមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបធំបំផុត N មួយ។ យើងត្រូវតែទាញរកផលជាភាពផ្ទុយពីការពិត។ នាំឱ្យ $N \geq n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ។

តាង $M = N + 1$ ។ នាំឱ្យ M ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប ពីព្រោះវាជាផលបូកនៃពីរចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប។
នាំឱ្យ $M = N + 1 > N$ ។
ដូចនេះ M ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបដែលធំជាង N ។
នាំឱ្យ N ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបធំបំផុត និង N មិនមែនជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបធំបំផុតទេ ដែលផ្ទុយពីការពិត។
ភាពផ្ទុយពីការពិតនេះ បង្ហាញថា ការឧបមាមិនពិត និងនាំឱ្យបកាសន៍ « គ្មានចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបធំបំផុតទេ » ពិត។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបណាមួយ ជាចំនួនគត់គូផងនិងជាចំនួនគត់សេសផង។

ចម្លើយ

យើងយកឈ្នាប់មិននៃបកាសន៍ « គ្មានចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបណាមួយ ជាចំនួនគត់គូផងនិងជាចំនួនគត់សេសផង » និងឧបមាថាវាជាបកាសន៍ពិត។
ឧបមាថាវាមិនពិត គឺថាឧបមាមានចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប n ដែលជាចំនួនគត់គូផងនិងជាចំនួនគត់សេសផង។ យើងត្រូវតែទាញរកផលជាភាពផ្ទុយពីការពិត។
តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ នាំឱ្យមាន $a \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 2a$
និងតាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់សេស នាំឱ្យមាន $b \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 2b + 1$ ។
នាំឱ្យ $2a = 2b + 1$ សមមូល $2a - 2b = 1$
សមមូល $2(a-b) = 1$ សមមូល $a - b = \frac{1}{2}$ ។
ដោយ $a \in \mathbb{Z}$ និង $b \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $a - b \in \mathbb{Z}$ ប៉ុន្តែ $a - b = \frac{1}{2}$ និង $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ។
ដូចនេះ $a - b \in \mathbb{Z}$ និង $a - b \notin \mathbb{Z}$ ដែលផ្ទុយពីការពិត។
ភាពផ្ទុយពីការពិតនេះ បង្ហាញថា ការឧបមាមិនពិត និងនាំឱ្យបកាសន៍ « គ្មានចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបណាមួយ ជាចំនួនគត់គូផងនិងជាចំនួនគត់សេសផង » ពិត។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា ផលបូកនៃចំនួនសនិទាន និង ចំនួនអសនិទានណាក៏ដោយ ជាចំនួនអសនិទាន។

ចម្លើយ

យើងដាក់ឈ្នាប់មិននៃបកាសន៍ « ផលបូកនៃចំនួនសនិទាន និង ចំនួនអសនិទានណាក៏ដោយ ជាចំនួនអសនិទាន » និងឧបមាថាវាជាបកាសន៍ពិត។
ឧបមាថាវាមិនពិត គឺថាឧបមាមានចំនួនសនិទាន r និង ចំនួនអសនិទាន s ដែល $r + s$ ជាចំនួនសនិទាន។ យើងត្រូវតែទាញរកផលជាភាពផ្ទុយពីការពិត។
តាមនិយមន័យនៃចំនួនសនិទាន នាំឱ្យមាន $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ និង $d \neq 0$

ដែល $r=\frac{a}{b}$, $r+s=\frac{c}{d}$ ។

តាមការជំនួស យើងបាន៖

$$\frac{a}{b}+s=\frac{c}{d}$$

សមមូល $s=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}$ ។

ដោយ $a, b, c, d\in\mathbb{Z}, b\neq 0$ និង $d\neq 0$

នាំឱ្យ $bc-ad\in\mathbb{Z}$, $bd\in\mathbb{Z}$ និង $bd\neq 0$ ។

នាំឱ្យ s ជាចំនួនសនិទាន ដែលផ្ទុយពីការពិតនឹងការឧបមាថា s ជាចំនួនអសនិទាន។

ដូច្នេះ ការឧបមាមិនពិត និងបកាសន៍ « ផលបូកនៃចំនួនសនិទាន និង ចំនួនអសនិទានណាក៏ដោយ ជាចំនួនអសនិទាន » ពិត ។

យើងមានទ្រឹស្តីស្រដៀងគ្នា ដើម្បីស្រាយបំភ្លឺថា បកាសន៍ H_1 ណាមួយពិតនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទ T មួយ គេសន្មតនៅក្នុង T ថាសម្មតិកម្ម $\neg H_1$ ពិត ហើយប្រើសម្មតិកម្មនេះស្រាយបំភ្លឺបានបកាសន៍ H_2 មួយដែលផ្ទុយពីបកាសន៍មួយដែលពិតជានិច្ច មានន័យថា បើបកាសន៍ $\neg H_1$ មិនពិត នោះគេបាន H_1 ជាបកាសន៍ពិត។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\forall a, b\in\mathbb{R}$ នោះគេបាន $e^a+e^b\geq 2\sqrt{e^{a+b}}$ ។

ចម្លើយ

តាង H_1 ជាបកាសន៍ $\forall a, b\in\mathbb{R}:\ e^a+e^b\geq 2\sqrt{e^{a+b}}$ ។

ឧបមាថា $\neg H_1$ ជាបកាសន៍ពិត គឺថា $\exists a, b\in\mathbb{R}:\ e^a+e^b<2\sqrt{e^{a+b}}$

$$\leftrightarrow \left(\sqrt{e^a}\right)^2-2\sqrt{e^a}\cdot\sqrt{e^b}+\left(\sqrt{e^b}\right)^2<0$$

$\leftrightarrow \left(\sqrt{e^a}-\sqrt{e^b}\right)^2<0$ ផ្ទុយពីការពិតដែលថា $\left(\sqrt{e^a}-\sqrt{e^b}\right)^2\geq 0$ ។

ដូចនេះ យើងបាន H_1 ជាបកាសន៍ $\forall a, b\in\mathbb{R}:\ e^a+e^b\geq 2\sqrt{e^{a+b}}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ចម្លើយ

តាង H_1 ជាបកាសន៍ $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ឧបមាថា $\neg H_1$ ជាបកាសន៍ពិត គឺថា $\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនអសនិទាន។

មានន័យថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន។
តាមនិយមន័យនៃចំនួនសនិទាន នាំឱ្យមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q
ដែលគ្មានកត្តារួមផ្សៀងផ្ទាត់ $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ ។
នាំឱ្យ $p=\sqrt{2}q \to p^2=2q^2 \quad (*)$
នាំឱ្យ p^2 ជាចំនួនគត់គូ (តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ)។
នាំឱ្យ p ជាចំនួនគត់គូ (តាមឧទាហរណ៍មុន) ហើយតាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ យើងអាចតាង $p=2m\,,\, m\in\mathbb{Z}$ នោះសមីការ $(*)$ ទៅជា៖

$$(2m)^2=2q^2 \leftrightarrow 4m^2=2q^2 \leftrightarrow 2m^2=q^2$$

នាំឱ្យ q^2 ជាចំនួនគត់គូ និង q ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ (តាមឧទាហរណ៍មុន) ។
នាំឱ្យចំនួន p និង q ទាំងពីរមានកត្តារួមស្មើនឹង 2 ។
ចម្លើយនេះផ្ទុយពីការពិតនឹងការឧបមាថាចំនួន p និង q គ្មានកត្តារួមទេ។
នាំឱ្យ $\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ។
ដូចនេះ យើងបាន H_1 ជាបកាសន៍ $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ចម្លើយ

តាង H_1 ជាបកាសន៍ $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន។
ឧបមាថា $\neg H_1$ ជាបកាសន៍ពិត គឺថា $\sqrt{3}$ មិនមែនជាចំនួនអសនិទាន។
មានន័យថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនសនិទាន។
តាមនិយមន័យនៃចំនួនសនិទាន នាំឱ្យមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q
ដែលគ្មានកត្តារួម ផ្សៀងផ្ទាត់ $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ ។
នាំឱ្យ $p=\sqrt{3}q \to p^2=3q^2 \quad (**)$
នាំឱ្យ p ជាពហុគុណនៃ 3 ហើយយើងអាចតាង $p=3m\,,\, m\in\mathbb{Z}$ នោះសមីការ $(**)$ ទៅជា៖

$$(3m)^2=3q^2 \leftrightarrow 9m^2=3q^2 \leftrightarrow 3m^2=q^2$$

នាំឱ្យ q ក៏ជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ។
នាំឱ្យចំនួន p និង q ទាំងពីរមានកត្តារួមស្មើនឹង 3 ។
ចម្លើយនេះផ្ទុយពីការពិតនឹងការឧបមាថាចំនួន p និង q គ្មានកត្តារួមទេ។

នាំឱ្យ $\sqrt{3}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ។

ដូចនេះ យើងបាន H_1 ជាបកាសន៍ $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ប្រតិបត្តិ

១. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថាចំពោះ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ នោះគេបាន $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ។

២. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

៣. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថា $\sqrt{7}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

២.៧ វិធីលើកយកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ

វិធីនេះអនុវត្តសម្រាប់ស្រាយឈ្នាប់ $\rightarrow$ មួយមិនពិត គឺដើម្បីស្រាយបំភ្លឺថា បកាសន៍ $H_1 \rightarrow H_2$ មិនពិត គេគ្រាន់តែរកឧទាហរណ៍មួយដែល H_1 ជាបកាសន៍ពិត និង H_2 ជាបកាសន៍មិនពិត។

ដើម្បីបង្ហាញបកាសន៍មួយមានទម្រង់ << $\forall x \in D$, ប្រសិនបើ $P(x)$ នោះ $Q(x)$ >> ថាជាបកាសន៍មិនពិត គេត្រូវស្វែងរកតម្លៃ x នៃ D ដែល $P(x)$ ពិត និង $Q(x)$ មិនពិត។ ជាតុ x ហៅថា ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ បើ $a < b$ និង $c < d$ នោះគេបាន $a - c < b - d$ ជាបកាសន៍មិនពិត។

ចម្លើយ

តាង H_1 ជាបកាសន៍ $a < b$ និង $c < d$ ។ តាង H_2 ជាបកាសន៍ $a - c < b - d$ ។

ជាឧទាហរណ៍ យើងយក $a = 2, b = 5, c = -20$ និង $d = 3$ ។

យើងបាន $a = 2 < 5 = b$ និង $c = -20 < 3 = d$ មានន័យថា H_1 ជាបកាសន៍ពិត

ប៉ុន្តែ $a - c = 2 - (-20) = 22 < 2 = 5 - 3 = b - d$ ដែលជាបកាសន៍ H_2 មិនពិត។

ដូចនេះ $H_1 \rightarrow H_2$ ជាបកាសន៍មិនពិត។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថាបកាសន៍ << $\forall$ ចំនួនពិត a និង b, ប្រសិនបើ $a^2 = b^2$ នោះ $a = b$ >> ជាបកាសន៍មិនពិត។

ចម្លើយ

តាង $P(a,b)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ << $a^2 = b^2$ >> ។

តាង $Q(a,b)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ << $a = b$ >> ។

ជាឧទាហរណ៍ យើងយក $a = 1$ និង $b = -1$ ។

នាំឱ្យ $a^2 = 1^2 = 1$ និង $b^2 = (-1)^2 = 1$ ។

នាំឱ្យ $a^2 = b^2$ និង $P(1,-1)$ ជាបកាសន៍ពិត ប៉ុន្តែ $Q(1,-1)$ ជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះ $a = 1 \neq -1 = b$ ។

ដូចនេះ បកាសន៍ « $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ប្រសិនបើ $P(a,b)$ នោះ $Q(a,b)$ » ជាបកាសន៍មិនពិត។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថាបកាសន៍ «$\forall$ ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប x និង y , ប្រសិនបើ $x|y$ និង $y|x$ នោះ $x = y$» ជាបកាសន៍មិនពិត ។

ចម្លើយ

តាង $P(x,y)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ « $x|y$ និង $y|x$ » ។

តាង $Q(x,y)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ «$x = y$ » ។

ជាឧទាហរណ៍ យើងយក $x = 2$ និង $y = -2$ ។

នាំឱ្យ $2|(-2)$ និង $(-2)|2$ ។

នាំឱ្យ $x|y$ និង $y|x$ ហើយ $P(2,-2)$ ជាបកាសន៍ពិត ប៉ុន្តែ $Q(2,-2)$ ជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះ $a = 2 \neq -2 = b$ ។

ដូចនេះ បកាសន៍ « $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, ប្រសិនបើ $P(x,y)$ នោះ $Q(x,y)$ » ជាបកាសន៍មិនពិត។

ប្រតិបត្តិ

១. បង្ហាញថាបកាសន៍ « $\forall a, b \in \mathbb{R}$, បើ $b^2 > a^2$ នោះ $b > a$ » ជាបកាសន៍មិនពិត។

២. បង្ហាញថាបកាសន៍ « $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, បើ $x > y$ នោះ $xz > yz$ » ជាបកាសន៍មិនពិត។

២.៨ វិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា

យើងមានគោលការណ៍នៃវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាដូចតទៅ៖

គេឱ្យ $P(n)$ ជាលក្ខណៈមួយដែលបានកំណត់ចំពោះចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n និង a ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបថេរ។ ឧបមាថា បកាសន៍ពីរខាងក្រោមពិត៖

១. $P(a)$ ជាបកាសន៍ពិត។

២. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $k \geq a$ ប្រសិនបើ $P(k)$ ពិត នោះ $P(k+1)$ ពិត ។

នាំឱ្យបកាសន៍ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq a$, $P(n)$ ជាបកាសន៍ពិត។

វិធីសម្រាយតាមវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា

គេឱ្យបកាសន៍មួយមានទម្រង់ « ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq a$, លក្ខណៈ $P(n)$ ពិត។ » ដើម្បីបង្ហាញបកាសន៍នេះ យើងធ្វើជំហានពីរដូចតទៅ៖

ជំហានទី១ (ជំហានមូលដ្ឋាន)៖ បង្ហាញថាលក្ខណៈនេះពិត ចំពោះ $n = a$ ។

ជំហានទី២ (ជំហានកំណើន)៖ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $k \geq a$ ប្រសិនបើលក្ខណៈនេះពិត ចំពោះ $n = k$ នោះវាពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ចំពោះ } \forall n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ ។}$$

ចម្លើយ

តាងលក្ខណៈ $P(n)$ ជាសមីការ $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $1 = \dfrac{2}{2} = \dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$

នាំឱ្យលក្ខណៈនេះពិត ចំពោះ $n = 1$ ។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា $1+2+3+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

ចំពោះ $k \in \mathbb{N}$ ។ យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$1+2+3+\ldots+(k+1) = \dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ ។

តាមសម្មតិកម្មកំណើន យើងមាន $1+2+3+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ ។

នាំឱ្យ $1+2+3+\ldots+(k+1) = (1+2+3+\ldots+k)+(k+1)$

$$= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

មានន័យថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះលក្ខណៈ $P(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនថា ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ។}$$

ចម្លើយ

តាងលក្ខណៈ $Q(n)$ ជាសមីការ $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $1^2 = 1 = \dfrac{6}{6} = \dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$

នាំឱ្យលក្ខណៈ $Q(1)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k$ គឺថា

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$ ចំពោះ $k\in\mathbb{N}$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$ គឺបង្ហាញថា

$$1^2+2^2+3^2+...+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$ ។

តាមកំណើន យើងមាន $1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ។

នាំឱ្យ $1^2+2^2+3^2+...+(k+1)^2=(1^2+2^2+3^2+...+k^2)+(k+1)^2$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[(2k^2+4k)+(3k+6)]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[2k(k+2)+3(k+2)]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

មានន័យថាលក្ខណៈ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$ ។

ដូចនេះលក្ខណៈ $Q(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនថា ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$ ។

ចម្លើយ

តាងលក្ខណៈ $R(n)$ ជាសមីការ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ ។

- ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$

នាំឱ្យលក្ខណៈ $R(1)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $R(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k$ គឺថា

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1} \text{ ចំពោះ } k\in\mathbb{N} \text{ ។}$$

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $R(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$ គឺបង្ហាញថា

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}=\frac{k+1}{2(k+1)+1} \text{ ។}$$

តាមកំណើន យើងមាន $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$ ។

នាំឱ្យ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}$

$$=\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right]+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k^2+k)+(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(2k+1)+(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

មានន័យថាលក្ខណៈ $R(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$ ។

ដូចនេះ $R(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនលើ n ថា ចំពោះចំនួនពិត $r\neq 1$ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n\geq 0$ នោះគេបាន $\sum_{i=0}^{n} r^i=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ ។

ចម្លើយ

តាងលក្ខណៈ P(n) ជាសមីការ $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ ចំពោះចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប $n \geq 0$ ។

- ចំពោះ $n = 0$ យើងបាន $\sum_{i=0}^{0} r^i = r^0 = 1 = \frac{r-1}{r-1} = \frac{r^1-1}{r-1}$ ពីព្រោះ $r \neq 1$ ។

នាំឱ្យលក្ខណៈ P(0) ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ P(n) ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា $\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$ ចំពោះ

ចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប $k \geq 0$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ P(n) ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{(k+1)+1}-1}{r-1} \text{ ។}$$

តាមសម្មតិកម្មកំណើន យើងមាន $\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$ ។

នាំឱ្យ
$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1} = \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1}$$
$$= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + \frac{r^{k+1}(r-1)}{r-1} = \frac{r^{k+1}-1+r^{k+1}(r-1)}{r-1}$$
$$= \frac{r^{k+1}-1+r^{k+2}-r^{k+1}}{r-1} = \frac{r^{k+2}-1}{r-1} = \frac{r^{(k+1)+1}-1}{r-1}$$

មានន័យថាលក្ខណៈ P(n) ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ P(n) ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប $n \geq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា ដើម្បីបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប $n \geq 1$ គេបាន $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ចម្លើយ

តាងលក្ខណៈ S(n) ជាប្រយោគ « $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ »

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

នាំឱ្យលក្ខណៈ S(1) ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $S(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k$ គឺថា k^3-k ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k\geq 1$ មានន័យថា $\exists\, r\in\mathbb{N},\ k^3-k=3r$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $S(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$ គឺបង្ហាញថា

$(k+1)^3-(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

យើងមាន $(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1$

$$=(k^3-k)+3(k^2+k)=3r+3(k^2+k) \text{ (តាមកំណើន)}$$

$$=3(r+k^2+k)=3r_1$$

ដែល $r_1=r+k^2+k\in\mathbb{N}$ ។

តាមនិយមន័យនៃភាពចែកដាច់ នាំឱ្យ $(k+1)^3-(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

មានន័យថា $S(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$ ។

ដូចនេះ $S(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា ដើម្បីបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n\geq 1$ នោះគេបាន $2^{2n}-1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ចម្លើយ

តាងលក្ខណៈ $P(n)$ ជាប្រយោគ « $2^{2n}-1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ »

- ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $2^{2\cdot 1}-1=2^2-1=4-1=3=3\cdot 1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

នាំឱ្យលក្ខណៈ $P(1)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k$ គឺថា $2^{2k}-1$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k\geq 1$ មានន័យថា $\exists\, r\in\mathbb{N},\ 2^{2k}-1=3r$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$ គឺបង្ហាញថា

$2^{2(k+1)}-1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

យើងមាន $2^{2(k+1)}-1=2^{2k+2}-1=2^{2k}\cdot 2^2-1$ (តាមលក្ខណៈស្វ័យគុណ)

$$=2^{2k}\cdot 4-1=2^{2k}(3+1)-1$$

$$=2^{2k}\cdot 3+(2^{2k}-1) \quad \text{(តាមលក្ខណៈពីជគណិត)}$$

$$=2^{2k}\cdot 3+3r \quad \text{(តាមសម្មតិកម្មកំណើន)}$$

$$=3(2^{2k}+r)=3r_1$$

ដែល $r_1 = 2^{2k} + r \in \mathbb{N}$ ។

តាមនិយមន័យនៃភាពចែកដាច់ នាំឱ្យ $2^{2(k+1)} - 1$ ចែកដាច់នឹង 3

មានន័យថា $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ $P(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា ដើម្បីបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \ge 3$ នោះគេបាន $2n+1 < 2^n$ ។

ចម្លើយ

តាងលក្ខណៈ $Q(n)$ ជាវិសមីការ $2n+1 < 2^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \ge 3$ ។

- ចំពោះ $n = 3$ យើងបាន $2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$ ។

នាំឱ្យលក្ខណៈ $Q(3)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា $2k+1 < 2^k$ ចំពោះចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $k \ge 3$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$2(k+1) + 1 < 2^{k+1}$ ។

តាមសម្មតិកម្មកំណើន យើងមាន $2k+1 < 2^k$ ចំពោះចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $k \ge 3$

និង $2 < 2^k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $k \ge 2$ នាំឱ្យ

$$2(k+1) + 1 = 2k + 3 = (2k+1) + 2 < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

(តាមលក្ខណៈពីជគណិត និង ស្វ័យគុណ)។

នាំឱ្យ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ $Q(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \ge 3$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1, a_2, a_3, \ldots$ កំណត់ដោយ៖ $a_1 = 2$ និង $a_k = 5a_{k-1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $k \ge 2$ ។

ក. ចូរសរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត។

ខ. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា ដើម្បីបង្ហាញថា តួទូទៅនៃស្វ៊ីតផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \ge 1$ ។

ចម្លើយ

ក. សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត

យើងមាន $a_1 = 2$

$$a_2 = 5a_{2-1} = 5a_1 = 5 \cdot 2 = 10$$

$$a_3 = 5a_{3-1} = 5a_2 = 5 \cdot 10 = 50$$ និង

$$a_4 = 5a_{4-1} = 5a_3 = 5 \cdot 50 = 250$$ ។

ដូចនេះ បួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីតគឺ $2\,,10\,,50\,,250$ ។

ខ. តាងលក្ខណៈ $R(n)$ ជាសមីការ $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប $n \geq 1$ ។

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $a_1 = 2 \cdot 5^{1-1} = 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2$ ។

នាំឱ្យ $R(1)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $R(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា

$a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ ចំពោះចំនួន គត់វ៉ឺឡាទីប $k \geq 1$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $R(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$a_{k+1} = 2 \cdot 5^{(k+1)-1}$ ។

តាមនិយមន័យនៃស្វ៊ីត យើងបាន៖

$$a_{k+1} = 5a_{(k+1)-1} = 5a_k$$

$$= 5 \cdot \left(2 \cdot 5^{k-1}\right) \qquad \text{(តាមសម្មតិកម្មកំណើន)}$$

$$= 2 \cdot \left(5 \cdot 5^{k-1}\right) = 2 \cdot 5^{(k+1)-1} \qquad \text{(តាមលក្ខណៈស្វ័យគុណ)។}$$

នាំឱ្យ $R(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ $R(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប $n \geq 1$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N} = \{1\,,2\,,3\,,\ldots\}$ ។

២. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា ដើម្បីបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប $n \geq 1$ គេបាន $4^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

២.៩ លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងសិក្សាអំពីដំណោះស្រាយនូវលំហាត់មួយចំនួនតែប៉ុណ្ណោះ។

២.៩.១ លំហាត់

១. ចូរស្រាយតាមវិធីសិក្សាបែងចែកជាករណីថា $7n^2 + 7n$ ចែកដាច់នឹង 14 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{Z}$ ។

២. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទាល់ថា បើ $x^3 - 7x^2 + x - 7 = 0$ នោះគេបាន $x = 7$ ។

៣. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ស្រាយបំភ្លឺតាមវិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្មថា បើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ជាចំនួនគត់សេស។

៤. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

៥. បង្ហាញថាបកាសន៍ « បើ $p, q \in \mathbb{R}$ នោះ $\sqrt{pq} \leq \dfrac{p+q}{2}$ » ជាបកាសន៍មិនពិត។

៦. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា $2^{3n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

៧. គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1, a_2, a_3, \ldots$ កំណត់ដោយ៖ $a_1 = 3$ និង $a_k = 7a_{k-1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k \geq 2$ ។ ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

៨. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទាល់ថា ផលគុណនៃចំនួនគត់សេសពីរ ជាចំនួនគត់សេស ។

៩. ចូរស្រាយតាមវិធីសិក្សាបែងចែកជាករណីថា បើចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n មិនចែកដាច់នឹង 3 ទេ នោះគេបាន $n^2 - 1$ ត្រូវតែជាពហុគុណនៃ 3 ។

១០. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p ស្រាយបំភ្លឺតាមវិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្មថា បើ p^3 ជាចំនួនគត់គូ នោះ p ជាចំនួនគត់គូ។

១១. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថា $\sqrt[3]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

១២. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា $n^3 - 7n + 3$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

១៣. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា $3^{2n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 8 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

១៤. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា ដើម្បីបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 5$ នោះគេបាន $n^2 < 2^n$ ។

១៥. ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា

$1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = n(2n-1)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

១៦. ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា

$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

២.៩.២ ដំណោះស្រាយ

១. ចូរស្រាយតាមវិធីសិក្សាបែងចែកជាករណីថា $7n^2+7n$ ចែកដាច់នឹង 14 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{Z}$ ។

យើងមាន $7n^2+7n=7n(n+1)$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{Z}$ ។

ក្នុងករណីនេះ យើងសិក្សាបែងចែកជា២ករណីគឺ ករណី n ជាចំនួនគត់គូ ឬ n ជាចំនួនគត់សេស ។

- ករណី n ជាចំនួនគត់គូ គឺថា $n=2k, k\in\mathbb{Z}$

យើងបាន $n=2k$ ចែកដាច់នឹង 2 និង

នាំឱ្យ $7n^2+7n=7n(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 14 ។

- ករណី n ជាចំនួនគត់សេស គឺថា $n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$

យើងបាន $n+1=2k+2=2(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 2 និង

នាំឱ្យ $7n^2+7n=7n(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 14 ។

ជាសរុប យើងបាន $7n^2+7n$ ចែកដាច់នឹង 14 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{Z}$ ។

២. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទាល់ថា បើ $x^3-7x^2+x-7=0$ នោះគេបាន $x=7$ ។

យើងមាន $x^3-7x^2+x-7=0$ (1) ។

ដោយ $x^3-7x^2+x-7=x^2(x-7)+(x-7)=(x^2+1)(x-7)$

នាំឱ្យសមីការ (1) $\Leftrightarrow x^2+1=0$ ឬ $x-7=0$

តែ $x^2+1>0$ ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $x-7=0$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $x=7$ ។

៣. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ស្រាយបំភ្លឺតាមវិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្មថា បើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ជាចំនួនគត់សេស។

ឧបមាថា n ជាចំនួនគត់គូ។ យើងត្រូវតែបង្ហាញថា n^2 ជាចំនួនគត់គូ។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ នាំឱ្យមាន $k\in\mathbb{Z}$ ដែល $n=2k$ ។

តាមការជំនួស និង លក្ខណៈពីជគណិត នាំឱ្យ

$$n^2=(2k)^2=4k^2$$
$$=2(2k^2)=2k_1$$

ដែល $k_1 = 2k^2 \in \mathbb{Z}$ ។
តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ យើងបាន n^2 ជាចំនួនគត់គូ។
ដូចនេះ បើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ជាចំនួនគត់សេស។

៤. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន។
តាង H_1 ជាបកាសន៍ $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន។
ឧបមាថា $\neg H_1$ ជាបកាសន៍ពិត គឺថា $\sqrt{6}$ មិនមែនជាចំនួនអសនិទាន។
មានន័យថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនសនិទាន។
តាមនិយមន័យនៃចំនួនសនិទាន នាំឱ្យមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q
ដែលគ្មានកត្តារួមផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ ។
នាំឱ្យ $p = \sqrt{6}\,q \to p^2 = 6\,q^2 = 2(3\,q^2) \quad (*)$
នាំឱ្យ p^2 ជាចំនួនគត់គូ (តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ)។
នាំឱ្យ p ជាចំនួនគត់គូ ។
តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ យើងអាចតាង $p = 2m\,,\, m \in \mathbb{Z}$ នោះសមីការ $(*)$ ទៅជា៖

$$(2m)^2 = 2(3\,q^2) \;\leftrightarrow\; 2(2m^2) = 2(3\,q^2) \;\leftrightarrow\; 2m^2 = 3q^2$$

នាំឱ្យ $3q^2$ ជាចំនួនគត់គូ។
នាំឱ្យ q^2 និង q ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ ។
នាំឱ្យចំនួន p និង q ទាំងពីរមានកត្តារួមស្មើនឹង 2 ។
ចម្លើយនេះផ្ទុយពីការពិតនឹងការឧបមាថាចំនួន p និង q គ្មានកត្តារួមទេ។
នាំឱ្យ $\sqrt{6}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ។
ដូចនេះ យើងបាន H_1 ជាបកាសន៍ពិត គឺថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

៥. បង្ហាញថាបកាសន៍ « បើ $p, q \in \mathbb{R}$ នោះ $\sqrt{pq} \le \frac{p+q}{2}$ » ជាបកាសន៍មិនពិត។
តាង $P(a,b)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ « $p, q \in \mathbb{R}$ » ។
តាង $Q(a,b)$ ជាអនុគមន៍បកាសន៍ « $\sqrt{pq} \le \frac{p+q}{2}$ » ។
ជាឧទាហរណ៍ យើងយក $p = -2$ និង $q = -2$ ។

នាំឱ្យ $p, q \in \mathbb{R}$ ។

នាំឱ្យ $P(-2, -2)$ ជាបកាសន៍ពិត ប៉ុន្តែ $Q(-2, -2)$ ជាបកាសន៍មិនពិត ពីព្រោះ

$2 = \sqrt{(-2)(-2)} \le \dfrac{-2-2}{2} = -2$ (មិនផ្ទៀងផ្ទាត់) ។

ដូចនេះ បកាសន៍ « បើ $P(a,b)$ នោះ $Q(a,b)$ » ជាបកាសន៍មិនពិត។

៦. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា $2^{3n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

តាងលក្ខណៈ $P(n)$ ជាប្រយោគ « $2^{3n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។ »

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $2^{3n} - 1 = 2^{3\cdot1} - 1 = 7 = 7\cdot1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

នាំឱ្យលក្ខណៈ $P(1)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា $2^{3k} - 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះ $\forall k \in \mathbb{N}$

មានន័យថា $\exists\, r \in \mathbb{N},\ 2^{3k} - 1 = 7r$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$2^{2(k+1)} - 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

យើងមាន $2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k+3} - 1 = 2^{3k} \cdot 2^3 - 1$ (តាមលក្ខណៈស្វ័យគុណ)

$= 2^{3k} \cdot 8 - 1 = 2^{3k}(7+1) - 1$

$= 2^{3k} \cdot 7 + (2^{3k} - 1)$ (តាមលក្ខណៈពីជគណិត)

$= 2^{3k} \cdot 7 + 7r$ (តាមសម្មតិកម្មកំណើន)

$= 7(2^{3k} + r) = 7r_1$

ដែល $r_1 = 2^{3k} + r \in \mathbb{N}$ ។

តាមនិយមន័យនៃភាពចែកដាច់ នាំឱ្យ $2^{3(k+1)} - 1$ ចែកដាច់នឹង 7

មានន័យថា $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ $P(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

៧. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា $a_n = 3\cdot 7^{n-1}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

តាង $R(n)$ ជាបកាសន៍ $a_n = 3\cdot 7^{n-1}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $a_1 = 3\cdot 7^{1-1} = 3\cdot 7^0 = 3\cdot 1 = 3$ ។

នាំឱ្យ $R(1)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថា $R(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $n=k$ គឺថា

$a_k = 3\cdot 7^{k-1}$ ចំពោះ $\forall k \in \mathbb{N}$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថា $R(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $n=k+1$ គឺបង្ហាញថា

$a_{k+1} = 3\cdot 7^{(k+1)-1}$ ។

តាមនិយមន័យនៃស្វ៊ីត យើងបាន៖

$$a_{k+1} = 7a_{(k+1)-1} = 7a_k$$

$$= 7\cdot\left(3\cdot 7^{k-1}\right) \quad \text{(តាមសម្មតិកម្មកំណើន)}$$

$$= 3\cdot\left(7\cdot 7^{k-1}\right) = 3\cdot 7^{(k+1)-1} \quad \text{(តាមលក្ខណៈស្វ័យគុណ)}។$$

នាំឱ្យ $R(n)$ ពិត ចំពោះ $n=k+1$ ។

ដូចនេះ $R(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

៨. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទាល់ថា ផលគុណនៃចំនួនគត់សេសពីរ ជាចំនួនគត់សេស ។

តាង x និង y ជាពីរចំនួនគត់សេស។ យើងចង់បង្ហាញថា xy ជាចំនួនគត់សេស ។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់សេស នោះមាន $s \in \mathbb{Z}$ និង $t \in \mathbb{Z}$ ដែល $x = 2s+1$ និង $y = 2t+1$ ។

នាំឱ្យ

$$xy = (2s+1)(2t+1) = 2t(2s+1) + (2s+1)$$

$$= 2(2st+t+s)+1 = 2\ell + 1$$

ដែល $\ell = 2st+t+s \in \mathbb{Z}$ ពីព្រោះ $s \in \mathbb{Z}$ និង $t \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់សេស នាំឱ្យ xy ជាចំនួនគត់សេស ។

៩. ចូរស្រាយតាមវិធីសិក្សាបែងចែកជាករណីថា n^2-1 ជាពហុគុណនៃ 3 ។

យើងមាន n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ដែលមិនចែកដាច់នឹង 3 ។

នៅពេលវាចែកនឹង 3 នោះយើងបានសំណល់គឺ 1 ឬ 2 ។

នោះយើងមាន២ករណីកើតឡើងគឺ $\exists q \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 3q+1$ ឬ $n = 3q+2$ ។

- ករណីទី១៖ បើ $n = 3q+1$ នាំឱ្យ

$$n^2 - 1 = (3q+1)^2 - 1$$

$$= (3q)^2 + 2(3q)(1) + 1^2 - 1$$

$= 3(3q^2 + 2q) = 3k$

ដែល $k = 3q^2 + 2q \in \mathbb{Z}$ ។

នាំឱ្យ $n^2 - 1$ ជាពហុគុណនៃ 3 ។

- ករណីទី២៖ បើ $n = 3q + 2$ នាំឱ្យ

$n^2 - 1 = (3q + 2)^2 - 1$

$= (3q)^2 + 2(3q)(2) + 2^2 - 1$

$= 3(3q^2 + 4q + 1) = 3\ell$

ដែល $\ell = 3q^2 + 4q + 1 \in \mathbb{Z}$ ។

នាំឱ្យ $n^2 - 1$ ជាពហុគុណនៃ 3 ។

ក្នុងករណីទាំងពីរ យើងបានបង្ហាញថា $n^2 - 1$ ជាពហុគុណនៃ 3 ។

១០. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p ស្រាយបំភ្លឺតាមវិធីសម្រាយផ្ទុយពីសម្មតិកម្មថា បើ p^3 ជាចំនួនគត់គូ នោះ p ជាចំនួនគត់គូ។

តាង A ជាបកាសន៍ p^3 ជាចំនួនគត់គូ ។

តាង B ជាបកាសន៍ p ជាចំនួនគត់គូ ។

ឧបមាថា $\neg B$ ជាបកាសន៍ពិត គឺថា p ជាចំនួនគត់សេស ។ យើងត្រូវតែបង្ហាញថា $\neg B$ ជាបកាសន៍ពិតដែរ គឺថា p^3 ជាចំនួនគត់សេស ។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់សេស នាំឱ្យមាន $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $p = 2k + 1$ ។

តាមការជំនួស និង លក្ខណៈពីជគណិត នាំឱ្យ

$p^3 = (2k + 1)^3 = (2k)^3 + 3(2k)^2(1) + 3(2k)(1^2) + 1^3$

$= 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 = 2k_1 + 1$

ដែល $k_1 = 4k^3 + 6k^2 + 3k \in \mathbb{Z}$ ។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់សេស យើងបាន p^3 ជាចំនួនគត់សេស មានន័យថា $\neg B$ ជាបកាសន៍ពិត ។

ដូចនេះ បើ p^3 ជាចំនួនគត់គូ នោះ p ជាចំនួនគត់គូ។

១១. ចូរប្រើវិធីសម្រាយផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថា $\sqrt[3]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

តាង P ជាបកាសន៍ $\sqrt[3]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ឧបមាថា $\neg P$ ជាបកាសន៍ពិត គឺថា $\sqrt[3]{2}$ មិនមែនជាចំនួនអសនិទាន។

មានន័យថា $\sqrt[3]{2}$ ជាចំនួនសនិទាន។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនសនិទាន នាំឱ្យមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q

ដែលគ្មានកត្តារួមផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$ ។

នាំឱ្យ $p = \sqrt[3]{2}\, q \to p^3 = 2q^2 \quad (**)$

នាំឱ្យ p^3 ជាចំនួនគត់គូ (តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ)។

នាំឱ្យ p ជាចំនួនគត់គូ (តាមលំហាត់ទី១០) ។

តាមនិយមន័យនៃចំនួនគត់គូ យើងអាចតាង $p = 2m\,,\, m \in \mathbb{Z}$ នោះសមីការ $(**)$ ទៅជា៖

$$(2m)^3 = 2q^2 \leftrightarrow 2(4m^3) = 2(q^2) \leftrightarrow 2(2m^3) = q^2$$

នាំឱ្យ q^2 ជាចំនួនគត់គូ។

នាំឱ្យ q ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ ។

នាំឱ្យចំនួន p និង q ទាំងពីរមានកត្តារួមស្មើនឹង 2 ។

ចម្លើយនេះផ្ទុយពីការពិតនឹងការឧបមាថាចំនួន p និង q គ្មានកត្តារួមទេ។

នាំឱ្យ $\sqrt[3]{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ។

ដូចនេះ យើងបាន P ជាបកាសន៍ពិត គឺថា $\sqrt[3]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

១២. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា $n^3 - 7n + 3$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

តាង $S(n)$ ជាបកាសន៍ « $n^3 - 7n + 3$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ »

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $n^3 - 7n + 3 = 1^3 - 7(1) + 3 = -3$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

នាំឱ្យលក្ខណៈ $S(1)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $S(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា $k^3 - 7k + 3$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k \geq 1$ មានន័យថា $\exists\, r \in \mathbb{N},\ k^3 - 7k + 3 = 3r$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $S(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$(k+1)^3 - 7(k+1) + 3$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - 7(k+1) + 3 &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 7k - 7 + 3 \\ &= k^3 + 3k^2 - 4k - 3 \\ &= (k^3 - 7k + 3) + (3k^2 + 3k - 6)\end{aligned}$$

$= 3r + 3(k^2 + k - 2)$ (តាមកំណើន)

$= 3(r + k^2 + k - 2) = 3r_1$

ដែល $r_1 = r + k^2 + k - 2 \in \mathbb{N}$ ។

តាមនិយមន័យនៃភាពចែកដាច់ នាំឱ្យ $(k+1)^3 - 7(k+1) + 3$ ចែកដាច់នឹង 3

មានន័យថា S(n) ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ S(n) ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

១៣. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា $3^{2n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 8 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

តាង P(n) ជាបកាសន៍ « $3^{2n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 8 ។ »

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $3^{2n} - 1 = 3^{2\cdot 1} - 1 = 8 = 8\cdot 1$ ចែកដាច់នឹង 8 ។

នាំឱ្យលក្ខណៈ P(1) ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ P(n) ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា $3^{2k} - 1$ ចែកដាច់នឹង 8 ចំពោះ $\forall k \in \mathbb{N}$

មានន័យថា $\exists \ell \in \mathbb{N},\ 3^{2k} - 1 = 8\ell$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ P(n) ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$3^{2(k+1)} - 1$ ចែកដាច់នឹង 8 ។

យើងមាន $3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k+2} - 1 = 3^{2k}\cdot 3^2 - 1$ (តាមលក្ខណៈស្វ័យគុណ)

$= 3^{2k}\cdot 9 - 1 = 3^{2k}(8+1) - 1$

$= 3^{2k}\cdot 8 + (3^{2k} - 1)$ (តាមលក្ខណៈពីជគណិត)

$= 3^{2k}\cdot 8 + 8\ell$ (តាមសម្មតិកម្មកំណើន)

$= 8(3^{2k} + \ell) = 8\ell_1$

ដែល $\ell_1 = 3^{2k} + \ell \in \mathbb{N}$ ។

តាមនិយមន័យនៃភាពចែកដាច់ នាំឱ្យ $3^{2(k+1)} - 1$ ចែកដាច់នឹង 8

មានន័យថា P(n) ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ P(n) ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

១៤. ចូរប្រើវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យា ដើម្បីបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 5$

នោះគេបាន $n^2 < 2^n$ ។

តាងលក្ខណៈ $Q(n)$ ជាវិសមីការ $n^2 < 2^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 5$ ។

- ចំពោះ $n = 5$ យើងបាន $5^2 = 25 < 32 = 2^5$ ។

នាំឱ្យលក្ខណៈ $Q(5)$ ជាបកាសន៍ពិត។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា $k^2 < 2^k$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k \geq 5$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$(k+1)^2 < 2^{k+1}$ ។

តាមសម្មតិកម្មកំណើន យើងមាន $k^2 < 2^k$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k \geq 5$

និង $2k+1 < 2^k$ ចំពោះចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $k \geq 3$ (តាមឧទាហរណ៍មុន)។

នាំឱ្យ

$$(k+1)^2 = k^2 + (2k+1) < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

(តាមលក្ខណៈពីជគណិត និង ស្វ័យគុណ)។

នាំឱ្យ $Q(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ $Q(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 5$ ។

១៥. ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា

$$1+5+9+...+(4n-3) = n(2n-1) \text{ ចំពោះ } \forall n \in \mathbb{N} \text{ ។}$$

តាងលក្ខណៈ $P(n)$ ជាសមីការ $1+5+9+...+(4n-3) = n(2n-1)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)$

នាំឱ្យលក្ខណៈ $P(1)$ ពិត ចំពោះ $n = 1$ ។

- ឧបមាថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា

$1+5+9+...+(4k-3) = k(2k-1)$ ចំពោះ $k \in \mathbb{N}$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$1+5+9+...+(4k+1) = (k+1)[2(k+1)-1]$ ។

តាមសម្មតិកម្មកំណើន យើងមាន $1+5+9+...+(4k-3) = k(2k-1)$ ។

នាំឱ្យ
$$\begin{aligned} 1+5+9+...+(4k+1) &= [1+5+9+...+(4k-3)] + (4k+1) \\ &= k(2k-1) + (4k+1) \\ &= 2k^2 - k + 4k + 1 \\ &= (2k^2 + 2k) + (k+1) \end{aligned}$$

$$= 2k(k+1) + (k+1)$$
$$= (k+1)(2k+1)$$
$$= (k+1)[2(k+1) - 1]$$

មានន័យថាលក្ខណៈ $P(n)$ ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះលក្ខណៈ $P(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

១៦. ចូរស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារដោយកំណើនគណិតវិទ្យាថា

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1 \text{ ចំពោះ } \forall n \in \mathbb{N} \text{ ។}$$

តាង $A(n)$ ជាបកាសន៍ $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

- ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $1\cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$

នាំឱ្យ $A(1)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $n = 1$ ។

- ឧបមាថា $A(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $n = k$ គឺថា

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k! = (k+1)! - 1$ ចំពោះ $k \in \mathbb{N}$ ។

យើងត្រូវតែបង្ហាញថា $A(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $n = k+1$ គឺបង្ហាញថា

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + (k+1)\cdot(k+1)! = [(k+1)+1]! - 1$ ។

តាមសម្មតិកម្មកំណើន យើងមាន $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k! = (k+1)! - 1$ ។

នាំឱ្យ $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + (k+1)\cdot(k+1)!$

$$= (1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k!) + (k+1)\cdot(k+1)!$$
$$= (k+1)! - 1 + (k+1)\cdot(k+1)!$$
$$= (k+2)\cdot(k+1)! - 1$$
$$= (k+2)! - 1$$
$$= [(k+1)+1]! - 1$$

មានន័យថា $A(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $n = k+1$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A(n)$ ជាបកាសន៍ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ជំពូកទី ៣

ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងទ្រឹស្តីសំណុំ

Using Logic for Set Theory

នៅក្នុងជំពូកទី៣នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាដូចជាបកាសន៍ និង ឃ្នាប់តក្កវិទ្យាក្នុងទ្រឹស្តីសំណុំដូចតទៅ៖

៣.១ សំណុំ និង ធាតុ

និយមន័យ

សំណុំ ជាបណ្តុំនៃធាតុ។ ធាតុអាចជាវត្ថុ មនុស្ស ឬ សត្វ។

សំណុំចែកចេញជាពីរប្រភេទគឺ សំណុំរាប់អស់ និង សំណុំអនន្ត។ សំណុំរាប់អស់ ជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុ ជាចំនួនកំណត់ រីឯ សំណុំអនន្ត ជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុច្រើនរាប់មិនអស់។

គេកំណត់យកអក្សរធំ $A, B, C, \ldots$ តាងឱ្យសំណុំ និង អក្សរតូច $x, y, z, \ldots$ ឬ ចំនួនតាងឱ្យធាតុនៃសំណុំ។

- បកាសន៍ x ជាធាតុរបស់សំណុំ A កំណត់សរសេរដោយ $x \in A$ ។
- បកាសន៍ x មិនមែនជាធាតុរបស់សំណុំ A កំណត់សរសេរដោយ $x \notin A$។

គេមានពីររបៀប ដើម្បីកំណត់សំណុំនីមួយៗ៖

- ចំពោះសំណុំទាំងឡាយដែលអាចសរសេរពង្រាយធាតុទាំងអស់បាន ឬ កំណត់តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ។

ឧទាហរណ៍ $A = \{1, 3, 7, 12\}$ តាងឱ្យសំណុំ A នៃធាតុ $1, 3, 7, 12$ ។

សំណុំនេះ ជាសំណុំរាប់អស់ ពីព្រោះចំនួនធាតុរបស់វាគឺមាន 4 ។
យើងបាន $1 \in A,\ 12 \in A$ ជាបកាសន៍ពិត តែ $0 \notin A$ ជាបកាសន៍មិនពិត។

ឧទាហរណ៍

ក. កំណត់សំណុំតួចែកវិជ្ជមាននៃ 10 ។

ខ. កំណត់សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ដែលធំជាង -5 តែតូចជាង 3 ។

គ. កំណត់សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលតូចជាង 2021 ។

ចម្លើយ

ក. សំណុំតួចែកវិជ្ជមាននៃ 10 តាងដោយ $A=\{1, 2, 5, 10\}$ ។

ខ. សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺទ្បាទីប ដែលធំជាង -5 តែតូចជាង 3 គឺ

$B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ ។

គ. សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលតូចជាង 2021 គឺ

$C=\{1, 2, 3, 4, ..., 2020\}$ ។

- ចំពោះសំណុំទាំងឡាយដែលធាតុមានលក្ខណៈសម្គាល់តាមលក្ខខណ្ឌជាក់លាក់ណាមួយ ឬ កំណត់តាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ ។

សំណុំនៃធាតុ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់តាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ គឺកំណត់ដោយ

$\{x / x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ $\}$ ឬ $\{x : x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ $\}$ ។

ឧទាហរណ៍ $B=\{x : x\in\mathbb{Z}, x>9\}$ តាងឱ្យសំណុំ B នៃធាតុ x ដែល x ជាចំនួនគត់រ៉ឺទ្បាទីប និង $x>9$ ។

យើងបាន $B=\{x : x\in\mathbb{Z}, x>9\}=\{10, 11, 12, ...\}$ ហើយ

$11\in B,\ 2021\in B$ ជាបកាសន៍ពិត និង $-4\notin B$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។

ឧទាហរណ៍ គេមានសំណុំពីរ A និង B ដែលកំណត់ដោយ

$A=\{x / x$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាងឬស្មើ $9\}$

និង $B=\{t : t^2-25=0\}$ ។

ចម្លើយ

កំណត់សំណុំ A និង B ។

យើងបាន៖

$A=\{x / x$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាងឬស្មើ $9\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

និង

$B=\{t : t^2-25=0\}=\{t : t^2=25\}$

$=\{t : t=\pm\sqrt{25}=\pm 5\}=\{-5, 5\}$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. កំណត់សំណុំខាងក្រោមតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ និង តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះ៖

ក. សំណុំតួចែកវិជ្ជមាននៃ 12 ។

ខ. សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ដែលធំជាង -7 តែតូចជាង 4 ។

គ. សំណុំនៃចំនួនបឋមតូចជាង 30 ។

២. គេមានសំណុំពីរ E និង F ដែលកំណត់ដោយ

$E=\{x / x$ ជាចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានតូចជាងឬស្មើ $15\}$ និង $F=\{t : t^3-3t=0\}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ E និង F ។

ខ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $c\wedge d, c\vee d, \neg c, \neg d, c\rightarrow d, c\leftrightarrow d$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា ដោយដឹងថាបកាសន៍ $c: 17\in E$, $d: -\sqrt{3}\in F$ ។

៣.២ សំណុំសាកល និង សំណុំទទេ

និយមន័យ សំណុំសាកល ជាសំណុំនៃធាតុទាំងអស់ដែលគេបានជ្រើសរើសយកមកសិក្សា។ គេកំណត់សរសេរវាដោយ U ។ សំណុំសាកលអាចជាសំណុំរាប់អស់ ឬ សំណុំអនន្ត ។

ឧទាហរណ៍

ក. សំណុំសាកល U នៃធាតុ x ដែល x ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបនិង $3<x<50$ ។

យើងបាន $U=\{x : x\in\mathbb{Z}, 3<x<50\}=\{4, 5, 6, ..., 49\}$ និង វាជាសំណុំរាប់អស់។

យើងឃើញថា $6\in U$, $20\in U$ ជាបកាសន៍ពិត តែ $2\notin U$ ជាបកាសន៍មិនពិត។

ខ. ក្នុងលំហវិមាត្របី សំណុំសាកល U ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៃលំហ ។ វាជាសំណុំអនន្ត។

និយមន័យ សំណុំទទេ ជាសំណុំដែលគ្មានធាតុ។ គេកំណត់សរសេរវាដោយ $\varnothing$ ។ សំណុំទទេនេះ ជាសំណុំរាប់អស់។

ឧទាហរណ៍

ក. សំណុំនៃសត្វគោដែលរស់នៅខេត្តបាត់ដំបង មានជើង២០។
វាជាសំណុំទទេ។

ខ. សំណុំ $C=\{x : x\in\mathbb{Z}, x^2=5\}$ ជាសំណុំទទេ ពីព្រោះ

$C=\{x : x\in\mathbb{Z}, x^2=5\}=\{x : x\in\mathbb{Z}, x=\pm\sqrt{5}\}=\varnothing$ ។

ប្រតិបត្តិ

កំណត់ប្រភេទនៃសំណុំដូចខាងក្រោម៖

ក. $U=\{y / y$ ជាចំនួនគត់គូវិជ្ជមាន $\}$ ។

ខ. $B=\{x\in\mathbb{R} : x^2=-3\}$ ។

គ. $C=\{t\in\mathbb{R} : t>-7\}$ ។

ឃ. $A=\{t\in\mathbb{R} : t^3>7t\}$ ។

ង. $D=\{x\in\mathbb{Z} : (3x-1)(3x-3)(5x+30)=0\}$ ។

៣.៣ សំណុំរង

និយមន័យ

គេថា A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B គេកំណត់សរសេរ $A\subseteq B$ បើគ្រប់ធាតុ x នៃ A ជាធាតុនៃ B ។

គេថា A ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃសំណុំ B គេកំណត់សរសេរ $A\subset B$ បើ A ជាសំណុំរងនៃ B និង វាមិនស្មើនឹង B ទេ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំសាកល $U=\{1,2,3,\dots,10\}$ និង សំណុំ $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$ និង $C=\{1,2,3,4,5\}$ ។

យើងឃើញថា A ជាសំណុំរងនៃ B និង B ជាសំណុំរងនៃ C

តែ B មិនមែនជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ C ទេ ពីព្រោះ $B=C$ ។

ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ យើងអាចបង្កើតបកាសន៍ផងដែរដូចជា៖

- បកាសន៍ $a: 3\in A$ ជាបកាសន៍ពិត ។
- បកាសន៍ $b: 3\in B$ ជាបកាសន៍ពិត និង បកាសន៍ $c: 0\in B$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $a\to b$ ជាបកាសន៍ពិត និង បកាសន៍ $a\to c$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។

ទ្រឹស្តីបទ

ក. ចំពោះគ្រប់សំណុំ A គេបាន $\varnothing\subseteq A\subseteq A\subseteq U$ ។

ខ. បើ $A\subseteq B$ និង $B\subseteq C$ នោះគេបាន $A\subseteq C$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយថា $\varnothing\subseteq A\subseteq A\subseteq U$ ។

ចំពោះគ្រប់សំណុំ A យើងមាន $\forall x: x\in\varnothing\to x\in A$ ពិត

(ពីព្រោះ $\forall x : x \in \varnothing$ ជាបកាសន៍មិនពិត)។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $\varnothing \subseteq A$ ។

យើងមាន $\forall y : y \in A \rightarrow y \in A$ ។ តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $A \subseteq A$ ។

ដោយ U ជាសំណុំសាកល យើងបាន $\forall t : t \in A \rightarrow t \in U$ ។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $A \subseteq U$ ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A យើងបាន $\varnothing \subseteq A \subseteq A \subseteq U$ ។

ចំណែកឯសំណួរ ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។

សម្គាល់

បើសំណុំ A មិនមែនជាសំណុំរងនៃសំណុំ B នោះគេកំណត់សរសេរ $A \not\subset B$ ។

នៅក្នុងសៀវភៅគណិតវិទ្យា គេនិយមប្រើនិមិត្តសញ្ញាពិសេសមានដូចខាងក្រោម៖

១. $\mathbb{N} =$ សំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ ឬ សំណុំនៃចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន៖ $1, 2, 3, \ldots$ ។

២. $\mathbb{Z} =$ សំណុំនៃចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប៖ $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ ។

៣. $\mathbb{Q} =$ សំណុំនៃចំនួនសនិទាន។

៤. $\mathbb{R} =$ សំណុំនៃចំនួនពិត។

៥. $\mathbb{C} =$ សំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច។

យើងឃើញថា $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ។

សម្គាល់

ចំពោះសំណុំនៃចំនួនអសនិទានវិញ គេកំណត់តាងផ្សេងៗគ្នាទៅតាមឯកសារនានាដូចជា $F, I, \mathbb{Q}^c$ ។

ប្រតិបត្តិ

គេមានសំណុំបី E, F និង G ដែលកំណត់ដោយ

$E = \{x \,/\, x$ ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង $2x \leq 30\}$

$F = \{x \,/\, x$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $\sqrt{x} \leq 3\}$

និង $G = \{x \,/\, x$ ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង $x^2 \leq 64\}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ E, F និង G ។

ខ. ចូរប្រៀបធៀបសំណុំពីរៗក្នុងចំណោមសំណុំទាំងបីនេះ។

គ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $\neg a, \neg b, \neg c \,.\, a \rightarrow b, c \rightarrow a, b \rightarrow a, a \rightarrow c$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា ដោយដឹងថាបកាសន៍ $a : 16 \in E$, $b : 9 \in F$, $c : 0 \in G$ ។

៣.៤ សមភាព និង ដ្យាក្រាមវិន

និយមន័យ គេថាសំណុំ A និង B ជាពីរសំណុំស្មើគ្នាកំណត់សរសេរ $A = B$ លុះត្រាតែគ្រប់ធាតុនៃសំណុំ A ជាធាតុនៃសំណុំ B និងផ្ទុយមកវិញ។

គេបាន $A = B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

ឬ $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំ $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ និង $B = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 11\}$ ។

តើសំណុំ B ស្មើនឹង A ឬទេ? តើបកាសន៍ $a : 11 \in B$ ជាបកាសន៍ពិត ឬ មិនពិត?

ចម្លើយ

យើងបាន $B = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 11\} = \{1, 2, 3, ..., 10\} = A$

និងបកាសន៍ $a : 11 \in B$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។

និយមន័យ ដ្យាក្រាមវិន ជារូបភាពតាងឱ្យសំណុំដោយសំណុំចំណុចក្នុងប្លង់។ គេតាងសំណុំសាកល U ដោយផ្ទៃកក្នុងនៃចតុកោណកែង ហើយសំណុំរងរបស់វាដោយថាសដែលនៅខាងក្នុងចតុកោណកែងនោះ ។

ឧទាហរណ៍ សង់ដ្យាក្រាមវិនក្នុងករណី៖

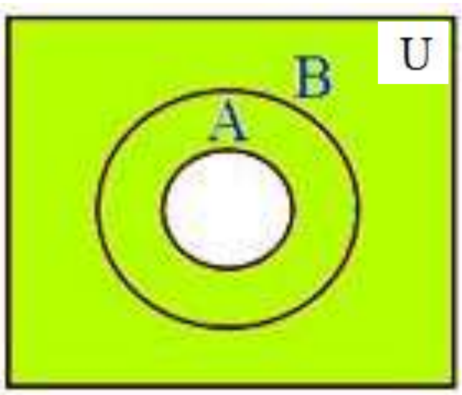
ក. $A \subseteq B$

ខ. A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា

គ. A និង B ជាសំណុំដែលមានធាតុរួម ។

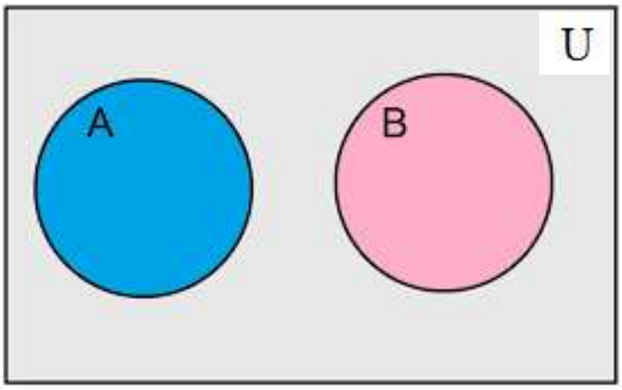
ចម្លើយ

ក. សង់ដ្យាក្រាមវិនក្នុងករណី $A \subseteq B$ ។



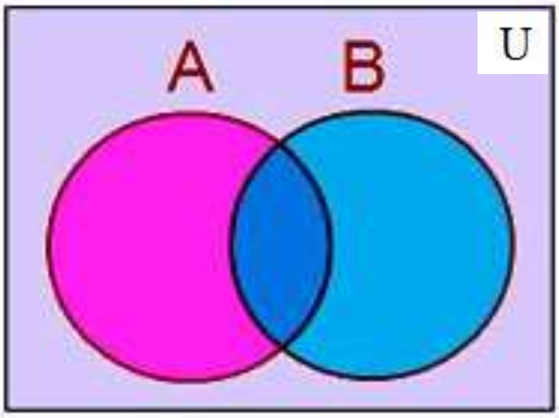
រូបទី១៖ $A \subseteq B$

ខ. សង់ដ្យាក្រាមវិនក្នុងករណី A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា ។



រូបទី២៖ A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា

គ. សង់ដ្យាក្រាមវិនក្នុងករណី A និង B ជាសំណុំដែលមានធាតុរួម ។



រូបទី៣៖ A និង B ជាសំណុំដែលមានធាតុរួម

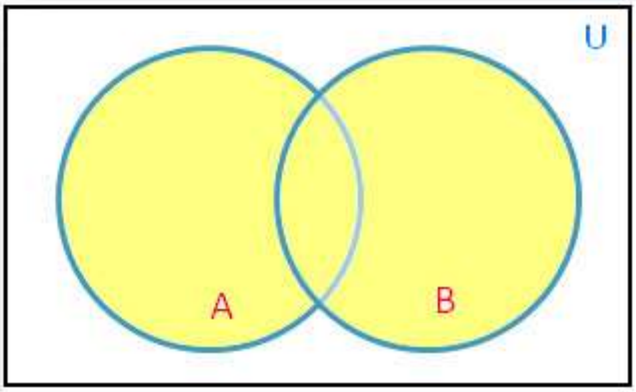
៣.៥ ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

និយមន័យ (ប្រមាណវិធីប្រជុំ)

ប្រជុំនៃពីរសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A \cup B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយដែល x ជាធាតុរបស់ A ឬ x ជាធាតុរបស់ B ។

យើងបាន $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$

$= \{x : x \in A \vee x \in B\}$ ។



រូបទី៤៖ $A \cup B$

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំ $A=\{x\in\mathbb{N}:0<x<9\}$ និង $B=\{x\in\mathbb{N}:6<x<12\}$។

គណនាសំណុំ $A\cup B$ ។

ចម្លើយ

គណនាសំណុំ $A\cup B$ ។

យើងបាន $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

និង $B=\{7, 8, 9, 10, 11\}$។

នាំឱ្យ $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\cup\{7, 8, 9, 10, 11\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ ។

ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ យើងអាចបង្កើតបកាសន៍ផងដែរដូចជា៖

- បកាសន៍ $x:9\in A$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $y:9\in B$ ជាបកាសន៍ពិត និង បកាសន៍ $z:12\in B$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $x\vee y$ ជាបកាសន៍ពិត និង បកាសន៍ $x\vee z$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។

លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីប្រជុំ

ក. $A\cup A=A$

ខ. $A\cup B=B\cup A$

គ. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

ឃ. $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$

ង. $A\cup\varnothing=A$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយថា $A\cup A=A$ ។

យើងមាន $\forall x:x\in A\cup A \overset{def}{\leftrightarrow} x\in A\vee x\in A$

$\overset{logic}{\leftrightarrow} x\in A$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A\cup A=A$ ។

ខ. ស្រាយថា $A\cup B=B\cup A$ ។

យើងមាន $\forall x:x\in A\cup B \overset{def}{\leftrightarrow} x\in A\vee x\in B$

$$\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} \ x \in B \vee x \in A$$

$$\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} \ x \in B \cup A \text{ ។}$$

ដូចនេះ យើងបាន $A \cup B = B \cup A$ ។

ចំណែកឯលក្ខណៈ ខ. គ. ឃ. និង ង. ទុកដូចជាលំហាត់។

ប្រតិបត្តិ

គេមានសំណុំបី U , A និង B ដែលកំណត់ដោយ

$U = \{ x \,/\, x$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $4 \le 2x \le 20 \}$

$A = \{ x \,/\, x \in U,\ 2\sqrt{x} \le 4 \}$ និង $B = \{ y \,/\, y \in U,\ 2y^2 \le 72 \}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ U , A, B និង $A \cup B$ រួចសង់ដ្យាក្រាមវិនផង។

ខ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $\neg a,\ \neg b,\ \neg c,\ a \vee b,\ a \vee c,\ c \vee b$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា ដោយដឹងថា បកាសន៍ $a : 1 \in U$, $b : 4 \in A$, $c : 7 \in B$ ។

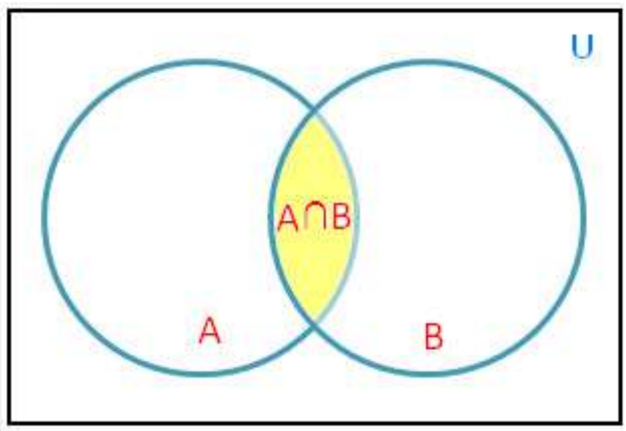
និយមន័យ (ប្រមាណវិធីប្រសព្វ)

ប្រសព្វនៃពីរសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A \cap B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយដែល x ជាធាតុរបស់ A និង x ជាធាតុរបស់ B ។

យើងបាន $A \cap B = \{ x \in U : x \in A \wedge x \in B \}$

$= \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$ ។

រូបទី៥៖ $A \cap B$



ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំ $A = \{ x \in \mathbb{N} : 0 < x < 9 \}$ និង $B = \{ x \in \mathbb{N} : 6 < x < 12 \}$ ។

គណនាសំណុំ $A \cap B$ ។

ចម្លើយ

គណនាសំណុំ $A\cap B$ ។

យើងបាន $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

និង $B=\{7, 8, 9, 10, 11\}$ ។

នាំឱ្យ $A\cap B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\cap\{7, 8, 9, 10, 11\}=\{7, 8\}$ ។

ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ យើងអាចបង្កើតបកាសន៍ផងដែរដូចជា៖

- បកាសន៍ $x: 3\in A$ ជាបកាសន៍ពិត ។
- បកាសន៍ $y: 6\in B$ ជាបកាសន៍មិនពិត និង បកាសន៍ $z: 10\in B$ ជាបកាសន៍ពិត ។
- បកាសន៍ $x\wedge y$ ជាបកាសន៍មិនពិត និង បកាសន៍ $x\wedge z$ ជាបកាសន៍ពិត ។

លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីប្រសព្វ

ក. $A\cap A=A$

ខ. $A\cap B=B\cap A$

គ. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

ឃ. $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$

ង. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

ច. $A\cap\varnothing=\varnothing$

ឆ. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយថា $A\cap A=A$ ។

យើងមាន $\forall x: x\in A\cap A \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} x\in A \wedge x\in A$

$\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} x\in A$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A\cap A=A$ ។

ខ. ស្រាយថា $A\cap B=B\cap A$ ។

យើងមាន $\forall t: t\in A\cap B \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} t\in A\wedge t\in B$

$\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} t\in B\wedge t\in A$

$\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} t \in B \cap A$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A \cap B = B \cap A$ ។

ចំណែកឯលក្ខណៈ គ. ឃ. ង. ច. និង ឆ. ទុកដូចជាលំហាត់។

បើ $A \cap B = \varnothing$ មានន័យថា សំណុំ A និង B គ្មានធាតុរួមទេ គេថា A និង B ជាសំណុំជាច់គ្នា។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំ $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 4\}$ និង $B = \{5, 7, 9\}$ ។

គណនាសំណុំ $A \cap B$ រួចសង់ដ្យាក្រាមវិនផង។

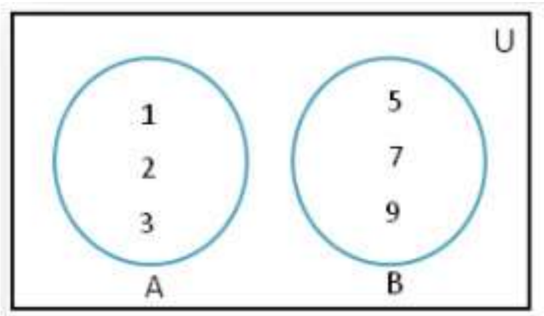
ចម្លើយ

គណនាសំណុំ $A \cap B$ និង សង់ដ្យាក្រាមវិន។

យើងមាន $A = \{1, 2, 3\}$ និង $B = \{5, 7, 9\}$ ។

នាំឱ្យ $A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{5, 7, 9\} = \varnothing$ ។

ដ្យាក្រាមវិន



រូបទី៦

ប្រតិបត្តិ

គេមានសំណុំបី U, A និង B ដែលកំណត់ដោយ

$U = \{x \,/\, x$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $2 \le 2x \le 40\}$

$A = \{x \,/\, x \in U,\ 3\sqrt{x} \le 12\}$ និង $B = \{y \,/\, y \in U,\ 3y^2 \le 100\}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ U, A, B និង $A \cap B$ រួចសង់ដ្យាក្រាមវិនផង។

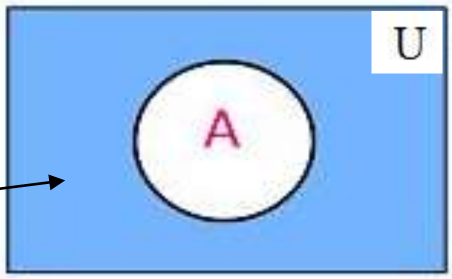
ខ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $\neg a,\ \neg b,\ \neg c,\ a \wedge b,\ a \wedge c,\ c \wedge b$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា ដោយដឹងថា បកាសន៍ $a : 1 \in U,\ b : 25 \in A,\ c : 9 \in B$ ។

និយមន័យ (សំណុំរងបំពេញ)

សំណុំរងបំពេញនៃសំណុំ A ក្នុង សំណុំសាកល U កំណត់សរសេរដោយ C_U^A ឬក៏ A^c គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយរបស់ U ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ A ។

យើងបាន $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$

$= \{x : x \in U , x \notin A\}$ ។



រូបទី៧៖ A^c

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំ $B = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 15\}$ ក្នុងសំណុំសាកល $U = \{x \in \mathbb{N} : x < 21\}$ ។

គណនាសំណុំ B^c ។ តើបកាសន៍ $a : 14 \in B^c$ ជាបកាសន៍ពិត ឬ មិនពិត ?

ចម្លើយ

គណនាសំណុំ B^c និងកំណត់ ត. (a) ។

យើងបាន $B = \{1, 2, 3, \dots , 14\}$ និង $U = \{1, 2, 3, \dots , 20\}$ ។

នាំឱ្យ $B^c = \{x : x \in U , x \notin B\} = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

និង ត. $(a) = 0$ ។

លក្ខណៈនៃសំណុំរងបំពេញ

ក. $A \cap A^c = \varnothing$ ខ. $A \cup A^c = U$

គ. $U^c = \varnothing$ ឃ. $\varnothing^c = U$

ង. $(A^c)^c = A$ ច. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

ឆ. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ជ. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយថា $A \cap A^c = \varnothing$ ។

យើងមាន $\forall y : y \in A \cap A^c \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} y \in A \wedge y \in A^c$

$\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} y \in A \wedge y \notin A$

$\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow}\ y\in A\wedge\neg(y\in A)$ មិនពិត

$\leftrightarrow y\in\varnothing$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A\cap A^c=\varnothing$ ។

ង. ស្រាយថា $(A^c)^c=A$ ។

ចំពោះគ្រប់ $m\in(A^c)^c \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} m\notin A^c \overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} \neg(m\in A^c)$

$\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} \neg(m\notin A) \overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} \neg(\neg(m\in A))$

$\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow}\ m\in A$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $(A^c)^c=A$ ។

ចំណែកឯលក្ខណៈ ខ. គ. ឃ. ច. ឆ. និង ជ. ទុកដូចជាលំហាត់។

ប្រតិបត្តិ

គេមានសំណុំបី U, A និង B ដែលកំណត់ដោយ

$U=\{x\ /\ x$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $3<3x\le 45\}$

$A=\{x\ /\ x\in U,\ 5\sqrt{x}\le 15\}$ និង $B=\{y\ /\ y\in U,\ 2y^2\le 242\}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ U, A, B, U^c, A^c និង B^c ។

ខ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $\neg a, \neg b, \neg c, a\wedge b, a\wedge c, c\wedge b$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា ដោយដឹងថា

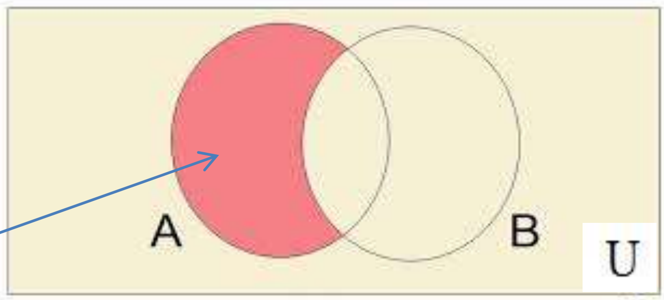
បកាសន៍ $a: 1\in U^c$, $b: 9\in A^c$, $c: 12\in B^c$ ។

និយមន័យ (ផលសងរវាងពីរសំណុំ)

ផលសងរវាងសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A\setminus B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយដែល x ជាធាតុរបស់ A និង x មិនមែនជាធាតុរបស់ B ។

យើងបាន $A\setminus B=\{x\in U: x\in A\wedge x\notin B\}$

$=\{x: x\in A\wedge x\notin B\}$ ។



រូបទី៨៖ $A\setminus B$

ឧទាហរណ៍ទី១១ គេឱ្យសំណុំ $E=\{x\in\mathbb{N}:0<x<11\}$ និង $F=\{x\in\mathbb{N}:5<x<15\}$ ។
គណនាសំណុំ $E\setminus F$ និង $F\setminus E$ ។

ចម្លើយ

គណនាសំណុំ $E\setminus F$ និង $F\setminus E$ ។

យើងបាន

$E=\{x\in\mathbb{N}:0<x<11\}=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$

និង $F=\{x\in\mathbb{N}:5<x<15\}=\{6, 7, 8, \dots, 14\}$ ។

នាំឱ្យ $E\setminus F=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

និង $F\setminus E=\{11, 12, 13, 14\}$ ។

ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ យើងអាចបង្កើតបកាសន៍ផងដែរដូចជា៖

- បកាសន៍ $x:6\in E\setminus F$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $y:12\in F\setminus E$ ជាបកាសន៍ពិត និង បកាសន៍ $z:2\in F\setminus E$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $\neg x$ ជាបកាសន៍ពិត និង បកាសន៍ $\neg y$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។

លក្ខណៈនៃផលសង

ក. $A^c=U\setminus A$ ខ. $A\setminus B=A\cap B^c$

គ. $(A\setminus B)\cap B=\varnothing$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយថា $A^c=U\setminus A$ ។

យើងមាន

$$A^c \overset{\text{def}}{=} \{x\in U: x\notin A\}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \{x: x\in U \wedge x\notin A\} \overset{\text{def}}{=} U\setminus A \text{ ។}$$

ដូចនេះ យើងបាន $A\setminus B=A\cap B^c$ ។

ខ. ស្រាយថា $A\setminus B=A\cap B^c$ ។

យើងមាន

$$A\setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x: x\in A \wedge x\notin B\}$$

$\overset{\text{def}}{=} \{x : x \in A \wedge x \in B^c\} \overset{\text{def}}{=} A \cap B^c$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A \setminus B = A \cap B^c$ ។

ចំណែកឯលក្ខណៈ គ. ទុកដូចជាលំហាត់។

ប្រតិបត្តិ

គេមានសំណុំបី U, A និង B ដែលកំណត់ដោយ

$U = \{x / x$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $15 \le 5x < 100\}$

$A = \{x / x \in U,\ 5\sqrt{x} \le 20\}$ និង $B = \{y / y \in U,\ 2y^2 \le 288\}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ $U,\ A, B, A \setminus B$ និង $B \setminus A$ ។

ខ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $\neg a,\ \neg b,\ \neg c,\ a \wedge b,\ a \vee c,\ c \wedge b$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា ដោយដឹងថា បកាសន៍ $a : 4 \in A \setminus B,\ b : 2 \in A \setminus B,\ c : 15 \in B \setminus A$ ។

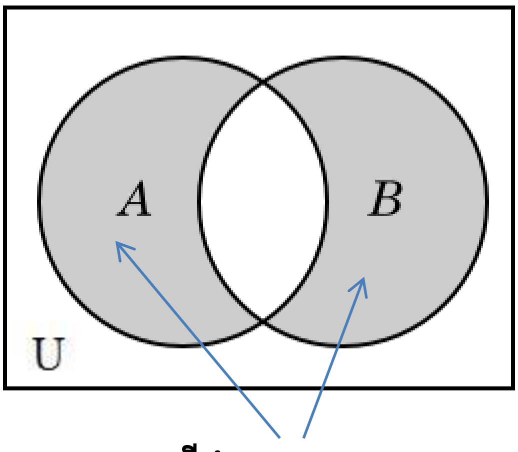
និយមន័យ (ផលសងឆ្លុះរវាងពីរសំណុំ)

ផលសងឆ្លុះរវាងសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A \Delta B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយដែល x ជាធាតុរបស់ A និង x មិនមែនជាធាតុរបស់ B ឬ x ជាធាតុរបស់ B និង x មិនមែនជាធាតុរបស់ A ។

យើងបាន

$$A \Delta B = \{x \in U : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$ ។



រូបទី៩៖ $A \Delta B$

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំ $U=\{0.1.2.\ldots,16\}, E=\{x\in\mathbb{N}:0<x<11\}$ និង $F=\{x\in\mathbb{N}:5<x<15\}$ ។

គណនាសំណុំ E^c, F^c និង $E\,\Delta\,F$ ។

ចម្លើយ

គណនាសំណុំ E^c, F^c និង $E\,\Delta\,F$ ។
យើងបាន

$$E=\{x\in\mathbb{N}:0<x<11\}=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

និង $F=\{x\in\mathbb{N}:5<x<15\}=\{6, 7, 8, \ldots, 14\}$ ។

នាំឱ្យ

$$E^c = U \setminus E = \{0, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$$

$$F^c = U \setminus F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 15, 16\}$$

និង $E\,\Delta\,F = \{x:(x\in E \wedge x\notin F)\vee(x\in F\wedge x\notin E)\}$

$$=\{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$$ ។

ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ យើងអាចបង្កើតបកាសន៍ផងដែរដូចជា៖

- បកាសន៍ $x: 11\in E$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $y: 8\in F$ ជាបកាសន៍ពិត និង បកាសន៍ $z: 15\in F$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $x\wedge\neg y$ ជាបកាសន៍មិនពិត និង បកាសន៍ $y\wedge\neg z$ ជាបកាសន៍ពិត ។

លក្ខណៈនៃផលសងធ្លុះ

ក. $A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

ខ. $A\,\Delta\,B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយថា $A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ ។
យើងមាន

$$A\,\Delta\,B \overset{\text{def}}{=} \{x:(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \{x: x\in A\setminus B \vee x\in B\setminus A\}$$

$$\overset{\text{def}}{=} (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ ។

ចំណែកឯលក្ខណៈ ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។

ប្រតិបត្តិ

១. គេមានសំណុំបី U , A និង B ដែលកំណត់ដោយ

$U = \{x \,/\, x$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $5 \le 5x < 90\}$

$A = \{x \,/\, x \in U,\ 3 < 3\sqrt{x} \le 9\}$ និង $B = \{y \,/\, y \in U,\ 16 < 2y^2 \le 288\}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ U, A, B, A^c, B^c និង $A \Delta B$ ។

ខ. ចូរកំណត់បកាសន៍ $\neg a$, $\neg b$, $\neg c$, $a \wedge \neg b$, $a \vee \neg c$, $(b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg b)$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា ដោយដឹងថាបកាសន៍ $a: 1 \in A \Delta B$, $b: 8 \in A \Delta B$, $c: 16 \in A \Delta B$ ។

២. ចូរសង់ដ្យាក្រាមវិននៃសំណុំខាងក្រោម ដោយស្គាល់សំណុំ U, A, B និង C ៖

ក. $A \cup B^c$ ខ. $(A \cap B)^c$

គ. $(A \setminus B) \cap C$ ឃ. $A \cap (B \Delta C)$ ។

៣.៦ សំណុំរាប់អស់ និង គោលការណ៍រាប់

និយមន័យ

គេថា សំណុំមួយជាសំណុំរាប់អស់ កាលណាសំណុំនេះ ជាសំណុំទទេ ឬ សំណុំដែលមាន m ធាតុផ្សេងគ្នាដែល m ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបរិជ្ឆមាន។ បើមិនដូចនេះទេ គេថាវាជាសំណុំអនន្ត ។ កាឌីណាល់នៃសំណុំ A ជាចំនួនធាតុនៃសំណុំនេះ គេកំណត់សរសេរដោយ $n(A)$ ឬ $|A|$។

ពីនិយមន័យនៃសំណុំរង សំណុំរងផ្ទាល់ សំណុំរងបំពេញ និង ផលសង យើងទាញបាន៖

- បើ $A \subseteq B$ នោះ $n(A) \le n(B)$ ។
- បើ $A \subset B$ នោះ $n(A) < n(B)$ ។
- បើ A^c ជាសំណុំរងបំពេញនៃសំណុំ A ក្នុងសំណុំសាកល U នោះ $n(A^c) = n(U) - n(A)$ ។
- បើ $A \setminus B$ ជាផលសងរវាងសំណុំ A និង B នោះ $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$ ។

សម្គាល់

ក្នុងសៀវភៅខ្លះទៀត គេប្រើនិមិត្តសញ្ញាសម្រាប់កាឌីណាល់នៃសំណុំ A គឺ $\mathrm{Card}(A)$ ឬ $\#(A)$ ។

ឧទាហរណ៍

- សំណុំទទេ ជាសំណុំរាប់អស់និងវាមានកាឌីណាល់ស្មើនឹង 0។

- សំណុំ $A=\{5, 6, 7, ..., 2018\}$ ជាសំណុំរាប់អស់ និង $n(A) = 2014$ ។

- សំណុំ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំអនន្ត និង $n(\mathbb{N}) = +\infty$ ។

បទគន្លឹះ

បើ A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នានិងរាប់អស់ពីរ នោះគេបាន $A\cup B$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $A=\{a_1 , a_2 ,..., a_m\}$ និង $B=\{b_1 , b_2 ,..., b_p\}$ ជាសំណុំដាច់គ្នានិងរាប់អស់។

នាំឱ្យ $n(A)=m$, $n(B)=p$, $a_i \neq b_j$ និង

$A\cup B=\{a_1 , a_2 ,..., a_m , b_1 , b_2 ,..., b_p\}$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ

$n(A\cup B)=m+p=n(A)+n(B)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ

បើ A និង B ជាសំណុំរាប់អស់ពីរ នោះគេបាន $A\cup B$ និង $A\cap B$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ។

កូរ៉ូឡែ

បើ A , B និង C ជាបីសំណុំរាប់អស់ នោះគេបាន $A\cup B\cup C$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$ ។

ឧទាហរណ៍ នៅក្នុងចំណោមនិស្សិត 71 នាក់ គេបានរកឃើញថា មាននិស្សិត 28 នាក់ចូលចិត្តរូបវិទ្យា 49 នាក់ចូលចិត្តគណិតវិទ្យា និង 17 នាក់ចូលចិត្តទាំងពីរមុខនេះ។ រកចំនួននិស្សិតដែលមិនចូលចិត្តមុខវិជ្ជាណាមួយសោះក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាទាំងពីរ។

ចម្លើយ

ជាដំបូង យើងតាង U ជាសំណុំនៃនិស្សិតទាំងអស់។

តាង A ជាសំណុំនៃនិស្សិតដែលចូលចិត្តរូបវិទ្យា។

តាង B ជាសំណុំនៃនិស្សិតដែលចូលចិត្តគណិតវិទ្យា។

យើងមាន $n(U)=71$ នាក់ , $n(A)=28$ នាក់

$n(B)=49$ នាក់ និង $n(A\cap B)=17$ នាក់ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ នាំឱ្យចំនួននិស្សិតដែលចូលចិត្តមុខវិជ្ជាមួយយ៉ាងតិចគឺ

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=28+49-17=60 \text{ នាក់ ។}$$

ដូចនេះ ចំនួននិស្សិតដែលមិនចូលចិត្តមុខវិជ្ជាណាមួយសោះក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាទាំងពីរគឺ

$n(U)-n(A\cup B)=71-60=11$ នាក់ ។

ប្រតិបត្តិ

នៅក្នុងចំណោមនិស្សិត 67 នាក់ គេបានរកឃើញថា មាននិស្សិត 37 នាក់ចូលចិត្តគណិតវិទ្យា 25 នាក់ចូលចិត្តកុំព្យូទ័រ និង 14 នាក់ចូលចិត្តទាំងពីរមុខនេះ។ រកចំនួននិស្សិតដែលមិនចូលចិត្តមុខវិជ្ជាណាមួយសោះក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាទាំងពីរ។

៣.៧ ថ្នាក់នៃសំណុំ និង សំណុំស្វ័យគុណ

និយមន័យ

ថ្នាក់នៃសំណុំតាងដោយ $\mathcal{A}$ ជាសំណុំដែលមានធាតុជាសំណុំ។ ចំណែកឯសំណុំរងនៃថ្នាក់ $\mathcal{A}$ ជាថ្នាក់រង។

ឧទាហរណ៍ សំណុំ $\mathcal{A}=\{\{2\},\{3,4\},\{5\}\}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំ។

យើងទាញបាន៖

- បកាសន៍ $y:\{2\}\in\mathcal{A}$ ជាបកាសន៍ពិត ។
- បកាសន៍ $z:\{6\}\in\mathcal{A}$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $a:\{5\}\subseteq\mathcal{A}$ ជាបកាសន៍មិនពិត ។
- បកាសន៍ $b:\{\{3,4\},\{5\}\}\subseteq\mathcal{A}$ ជាបកាសន៍ពិត ។
- បកាសន៍ $c:\{1\}\notin\mathcal{A}$ ជាបកាសន៍ពិត ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំ $E=\{2,3,4,5\}$។ ចូរកំណត់៖

ក. ថ្នាក់ $\mathcal{A}$ នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុ។

ខ. ថ្នាក់ $\mathcal{B}$ នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុនិងក្នុងនោះមានធាតុ 5 ។

គ. ពីសំណួរ ក និង ខ ចូរកំណត់ ត. $(a\rightarrow b)$ និង ត. $(b\rightarrow a)$ ដោយដឹងថាបកាសន៍

$a:\{2,3,4\}\in\mathcal{A}$ និង $b:\{2,3,4\}\in\mathcal{B}$ ។

ចម្លើយ

ក. យើងបានថ្នាក់នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុគឺ

$\mathcal{A} = \{\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$ ។

ខ. យើងបានថ្នាក់នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុ

និងក្នុងនោះមានធាតុ 5 គឺ

$\mathcal{B} = \{\{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$ ។

គ. កំណត់ ត. $(a \to b)$ និង ត. $(b \to a)$ ។

ពីសំណួរ ក និង ខ យើងបាន ត. $(a) \equiv 1$ និង ត. $(b) \equiv 0$ ។

ដូចនេះ ត. $(a \to b) \equiv 0$ និង ត. $(b \to a) \equiv 1$ ។

យើងឃើញថា $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ មានន័យថា $\mathcal{B}$ ជាថ្នាក់រងនៃ $\mathcal{A}$ ។

និយមន័យ ថ្នាក់នៃសំណុំរងទាំងអស់នៃសំណុំ E ហៅថា សំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំ E និង កំណត់សរសេរដោយ $\mathcal{P}(E)$ ឬ 2^E ។

គេបាន $\mathcal{P}(E) = \{ A : A \subseteq E \}$ ។

បើ E ជាសំណុំរាប់អស់ នោះគេបាន $\mathcal{P}(E)$ ក៏ជាសំណុំរាប់អស់ និង

$n(\mathcal{P}(E)) = 2^{n(E)}$ ។

ឧទាហរណ៍ រកសំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $A = \{3\}$ ខ. $E = \{2, 3\}$

គ. $F = \{2, 3, 4\}$ ។

ចម្លើយ

ក. រកសំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំ $A = \{3\}$ ។

ដោយសំណុំ A មាន $n(A) = 1$ ធាតុ នោះសំណុំស្វ័យគុណរបស់វាមាន $2^{n(A)} = 2^1 = 2$ ធាតុ

ហើយ $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\} = \{\varnothing, \{3\}\}$ ។

ខ. រកសំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំ $E = \{2, 3\}$ ។

ដោយសំណុំ E មាន $n(E) = 2$ ធាតុ នោះសំណុំស្វ័យគុណរបស់វាមាន $2^{n(E)} = 2^2 = 4$ ធាតុ

ហើយ $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, E\}$ ។

គ. រកសំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំ $F=\{2,3,4\}$ ។
ដោយសំណុំ F មាន $n(F)=3$ ជាតុ នោះសំណុំស្វ័យគុណរបស់វាមាន $2^{n(F)}=2^3=8$ ជាតុ
ហើយ $\mathcal{P}(F)=\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},F\}$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យសំណុំ $E=\{1,2,3,4,5\}$ ។ ចូរកំណត់៖

ក. ថ្នាក់ $\mathcal{A}$ នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុ។

ខ. ថ្នាក់ $\mathcal{B}$ នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុនិងក្នុងនោះមានធាតុ 3 ។

គ. ពីសំណួរ ក និង ខ ចូរកំណត់ ត. $(a\to b)$ និង ត. $(b\to a)$ ដោយដឹងថាបកាសន៍

$a:\{1,2,5\}\in\mathcal{A}$ និង $b:\{1,2,5\}\in\mathcal{B}$ ។

២. រកសំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $A=\{1,5\}$ ខ. $B=\{0,1,3\}$ ។

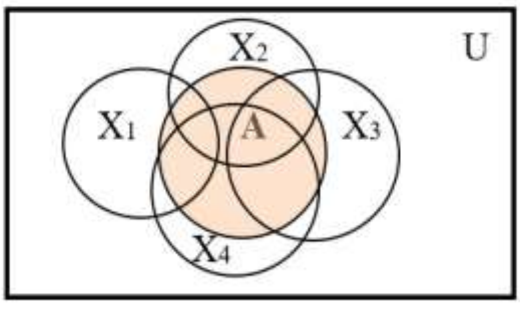
៣.៨ គម្រប និង បំណែករបស់សំណុំមួយ

និយមន័យ (គម្រប)

គេឱ្យ A ជាផ្នែកមួយនៃសំណុំ E ហើយ $\mathscr{F}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ E ។ គេថា $\mathscr{F}$ ជា**គម្រប**នៃ A លុះត្រាតែ A នៅក្នុងប្រជុំនៃគ្រប់ធាតុទាំងអស់របស់ $\mathscr{F}$ ។
ដូចនេះ $\mathscr{F}$ ជាគម្របនៃ A លុះត្រាតែ $A\subseteq\bigcup_{\mathscr{F}}X$ ។

ឧទាហរណ៍ ក្នុងរូបទី១០ $\mathscr{F}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ ជាគម្របនៃ A ។

រូបទី១០



និយមន័យ (បំណែក)

គេឱ្យ A ជាផ្នែកមួយនៃសំណុំ E ហើយ $\mathscr{F}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងមិនទទេនៃ E ។ គេថា $\mathscr{F}$ ជា**បំណែក** នៃ A លុះត្រាតែ៖

១. ធាតុរបស់ $\mathscr{F}$ ជាសំណុំដាច់គ្នាពីរៗ

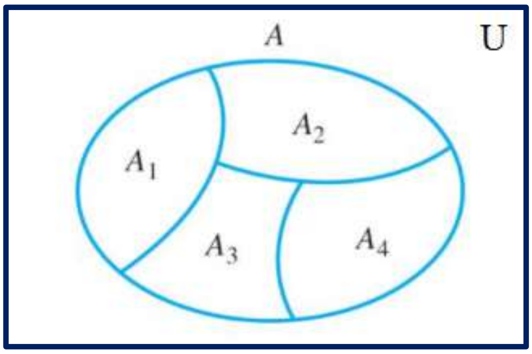
២. ប្រជុំនៃគ្រប់ធាតុទាំងអស់របស់ $\mathscr{F}$ ស្មើនឹង A ។

វិបាក

បើ $\mathscr{F}$ ជាបំណែកនៃ A នោះគេបាន $\mathscr{F}$ ជាគម្រូបនៃ A ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យ A ជាផ្នែកមួយនៃសំណុំ $E \subseteq U$ (ក្នុងរូបទី១១) ។

រូបទី១១



យើងបាន $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ជាបំណែកនៃ A ពីព្រោះ

$\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\},\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$ និង $\bigcup_{k=1}^{4} A_k = A$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យសំណុំ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq E \subseteq U$

ហើយ $F_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}\}$

$F_2 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}\}$

និង $F_3 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\}$

ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងមិនទទេនៃ B ។

ចូរកំណត់ថាតើសំណុំ F_1, F_2, F_3 ជាបំណែកនៃ B ដែរឬទេ។

ចម្លើយ

- ចំពោះសំណុំ F_1 មិនមែនជាបំណែកនៃ B ទេ ពីព្រោះ

$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 6\} \cup \{4, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \neq B$ ។

- ចំពោះសំណុំ F_2 មិនមែនជាបំណែកនៃ B ទេ ពីព្រោះ

$\{1, 3, 5\} \cap \{5, 7, 9\} = \{5\} \neq \varnothing$ ។

- ចំពោះសំណុំ F_3 ជាបំណែកនៃ B ពីព្រោះ

$\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \varnothing,\ \{1, 3, 5\} \cap \{7, 9\} = \varnothing,\ \{2, 4, 6, 8\} \cap \{7, 9\} = \varnothing$

និង $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6, 8\} \cup \{7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = B$ ។

ប្រតិបត្តិ

គេឱ្យសំណុំ $A=\{1,2,3\}\subseteq E=\{1,2,3,...,10\}$ ហើយ $\mathscr{F}_1=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ និង $\mathscr{F}_2=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងមិនទទេនៃ A ។

ក. ចូរកំណត់ថាតើសំណុំ $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ ជាបំណែកនៃ A ដែរឬទេ។

ខ. ចូររកបំណែកទាំងអស់នៃ A ។

គ. ចូរកំណត់ ត. $(a\wedge b)$, ត. $(a\vee b)$, ត. $(a\to b)$ និង ត. $(b\to a)$ ដោយដឹងថាបកាសន៍ $a:\{2,1\}\in\mathscr{F}_1$ និង $b:\{2,1\}\in\mathscr{F}_2$ ។

៣.៩ ផលគុណនៃសំណុំ

យើងមានគូមានលំដាប់ (a,b) ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ៖

១. បើ $a\neq b$ គេបាន $(a,b)\neq(b,a)$ ។

២. $(a,b)=(c,d)$ សមមូល $a=c$ និង $b=d$ ។

និយមន័យ

គេឱ្យពីរសំណុំ A និង B ។ គេហៅថា ផលគុណកាតេស្យ៉ាង ឬ ផលគុណដេកាតនៃពីរសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A\times B$ គឺជាសំណុំនៃគូមានលំដាប់ (a,b) ទាំងអស់ដែល $a\in A$ និង $b\in B$ ។

តាមនិយមន័យ គេបាន $A\times B=\{(a,b):a\in A\wedge b\in B\}$ ។

សម្គាល់

១. ជាទូទៅ $A\times B\neq B\times A$ បើ $A\neq B$ ។

២. យើងជំនួស A^2 ដោយ $A\times A$ ។

ហេតុនេះ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^2$ និង $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ ។

យើងក៏អាចពង្រីកផលគុណដេកាតដល់ n សំណុំផងដែរ គឺថា

$$\underbrace{A_1\times A_2\times ...\times A_n}_{n\text{ ដង}}=\prod_{k=1}^{n}A_k=\{(a_1,a_2,...,a_n):a_1\in A_1\wedge a_2\in A_2\wedge ...\wedge a_n\in A_n\}$$

$$=\{(a_1,a_2,...,a_n):a_1\in A_1,a_2\in A_2,...,a_n\in A_n\}$$

$$=\{(a_1,a_2,...,a_n):a_k\in A_k,k\in\{1,2,...,n\}\}$$

ហើយ

$$\underbrace{A\times A\times ...\times A}_{n\text{ ដង}}=A^n=\{(a_1,a_2,...,a_n):a_1\in A\wedge a_2\in A\wedge ...\wedge a_n\in A\}$$

$= \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_1 \in A, a_2 \in A, ..., a_n \in A\}$

$= \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_k \in A, k \in \{1, 2, ..., n\}\}$ ។

ហេតុនេះ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ និង $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យ $A = \{x, y, z\}$ និង $B = \{1, 2, 3\}$ ។

ក. ចូរកំណត់សំណុំ $A \times B$, $B \times A$ និង $A \times A$ ។

ខ. ចូរសង់ដ្យាក្រាមនៃសំណុំ $A \times B$ ។

គ. ចូរកំណត់ ត. $(a \wedge b)$, ត. $(a \vee b)$, ត. $(a \to b)$ និង ត. $(b \to a)$ ដោយដឹងថាបកាសន៍

$a : (3, x) \in A \times B$ និង $b : (3, x) \in B \times A$ ។

ចម្លើយ

ក. កំណត់សំណុំ $A \times B$, $B \times A$ និង $A \times A$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

$A \times B = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3), (z,1), (z,2), (z,3)\}$

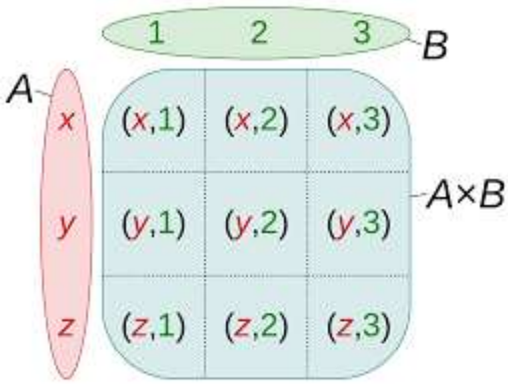
$B \times A = \{(1,x), (2,x), (3,x), (1,y), (2,y), (3,y), (1,z), (2,z), (3,z)\}$

និង

$A \times A = \{(x,x), (x,y), (x,z), (y,x), (y,y), (y,z), (z,x), (z,y), (z,z)\}$ ។

ខ. សង់ដ្យាក្រាមនៃសំណុំ $A \times B$ ។

រូបទី១២



គ. ចូរកំណត់ ត. $(a \wedge b)$, ត. $(a \vee b)$, ត. $(a \to b)$ និង ត. $(b \to a)$ ។

យើងមាន ត. $(a) = 0$ និង ត. $(b) = 1$ ។

នាំឱ្យ ត. $(a \wedge b) = 0$, ត. $(a \vee b) = 1$, ត. $(a \to b) = 1$ និង ត. $(b \to a) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ក. ចូរសង់សំណុំ $[0\,,1]\times\mathbb{R}$ ។

ខ. ចូរកំណត់ថាតើបកាសន៍ $(0.6\,,-3)\in[0\,,1]\times\mathbb{R}$ និង $(-0.1\,,5)\in[0\,,1]\times\mathbb{R}$ ជាបកាស ន៍

ពិត ឬ មិនពិត។

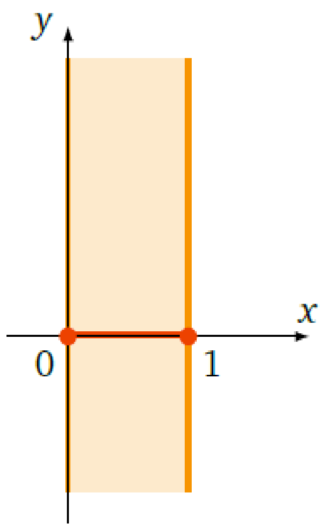
ចម្លើយ

ក. សង់សំណុំ $[0\,,1]\times\mathbb{R}$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

$[0\,,1]\times\mathbb{R}=\{(x,\,y):0\le x\le 1\wedge y\in\mathbb{R}\}$ ។

រូបទី១៣



ខ. តាមសំណួរ ក យើងបានបកាសន៍ $(0.6\,,-3)\in[0\,,1]\times\mathbb{R}$ ជាបកាសន៍ពិត និង $(-0.1\,,5)\in[0\,,1]\times\mathbb{R}$ ជាបកាសន៍មិនពិត។

លក្ខណៈនៃផលគុណដេកាត

បើគេមានសំណុំ A, B, C, X និង Y នោះគេបានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

ក. $(A\subseteq X\wedge B\subseteq Y)\Rightarrow A\times B\subseteq X\times Y$

ខ. $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing$

គ. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

ឃ. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

ង. $(A\neq\varnothing\wedge A\times B=A\times C)\Rightarrow B=C$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយថា $A\times B\subseteq X\times Y$ ។

យើងមាន

$$\forall\,(m,n):(m,n)\in A\times B \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} m\in A\wedge n\in B$$

ប៉ុន្តែ $A\subseteq X\wedge B\subseteq Y$ នាំឱ្យ $m\in X\wedge n\in Y$ ។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $(m,n)\in X\times Y$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A\times B\subseteq X\times Y$ ។

គ. ស្រាយថា $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\forall\,(x,y):(x,y)\in A\times(B\cup C) &\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} x\in A\wedge y\in B\cup C\\
&\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\
&\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\
&\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} (x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times C\\
&\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} (x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}$$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ ។

ចំណែកឯលក្ខណ: ខ. ឃ. និង ង. ទុកដូចជាលំហាត់។

ប្រតិបត្តិ

គេឱ្យ $A=\{1,2\}$ និង $B=\{1,2,3,4\}$ ។

ក. ចូរកំណត់សំណុំ $A\times B$, $B\times A$, $A\times A$ និង $B\times B$ ។

ខ. ចូរសង់ដ្យាក្រាមនៃសំណុំ $A\times B$ និង $B\times A$ ។

គ. ចូរសង់ដ្យាក្រាមនៃសំណុំ $A\times A$ និង $B\times B$ ។

ឃ. ចូរកំណត់ ត. $(p\wedge q)$, ត. $(p\vee q)$, ត. $(p\to q)$ និង ត. $(p\leftrightarrow q)$ ដោយដឹងថាបកាសន៍

$p:(3,2)\in A\times B$ និង $q:(4,1)\in B\times A$ ។

៣.១០ គ្រួសារនៃផ្នែក

និយមន័យ

គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយ និង $\mathscr{F}$ ជាសំណុំនៃផ្នែក X របស់ E ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈសម្គាល់ $\mathcal{P}$ ។ គេបាន $\mathscr{F} = \{ X : X \in \mathcal{P}(E) \wedge \mathcal{P}(X) \}$ ហៅថា **គ្រួសារនៃផ្នែក** X របស់ E ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈសម្គាល់ $\mathcal{P}$ ។

- ប្រជុំនៃធាតុទាំងអស់របស់ $\mathscr{F}$ កំណត់ដោយ

$\bigcup_{\mathscr{F}} X = \{x : \exists X \in \mathscr{F},\ x \in X\}$ ។

- ប្រសព្វនៃធាតុទាំងអស់របស់ $\mathscr{F}$ កំណត់ដោយ

$\bigcap_{\mathscr{F}} X = \{x : \forall X \in \mathscr{F},\ x \in X\}$ ។

និយមន័យ

គេឱ្យ U ជាសំណុំសាកល និង I ជាសំណុំនៃសន្ទស្សន៍។ គេតាង $\{X_i\}_{i \in I}$ ជាគ្រួសារនៃផ្នែក (សំណុំ) របស់ U ដែលមានសន្ទស្សន៍ក្នុងសំណុំ I ។

- ប្រជុំនៃធាតុទាំងអស់របស់ $\{X_i\}_{i \in I}$ កំណត់ដោយ

$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \in U : \exists i \in I,\ x \in X_i\}$ ។

- ប្រសព្វនៃធាតុទាំងអស់របស់ $\{X_i\}_{i \in I}$ កំណត់ដោយ

$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \in U : \forall i \in I,\ x \in X_i\}$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យសំណុំ $X_1 = (1, 8)$, $X_2 = (4, 14)$ និង $X_3 = (7, 20)$ ។

ក. គណនាសំណុំ $\bigcup_{i=1}^{3} X_i$ និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i$ ។

ខ. ចូរកំណត់ថាតើបកាសន៍ $20 \in \bigcup_{i=1}^{3} X_i$ និង $7.1 \in \bigcap_{i=1}^{3} X_i$ ជាបកាសន៍ពិត ឬ មិនពិត។

ចម្លើយ

ក. គណនាសំណុំ $\bigcup_{i=1}^{3} X_i$ និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i$ ។

យើងបាន៖

$$\bigcup_{i=1}^{3} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

$= (1\,,8)\cup(4\,,14)\cup(7,\,20) = (1\,,20)$

និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3$

$= (1\,,8)\cap(4\,,14)\cap(7,\,20) = (7,8)$ ។

ដូចនេះ $\bigcup_{i=1}^{3} X_i = (1\,,20)$ និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i = (7,8)$ ។

ខ. តាមសំណួរ ក យើងបានបកាសន៍ $20 \in \bigcup_{i=1}^{3} X_i$ ជាបកាសន៍មិនពិត និង

$7.1 \in \bigcap_{i=1}^{3} X_i$ ជាបកាសន៍ពិត។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យ $A_n = \{1,\,2,\,3,\ldots,\,n\}$ ។

ក. ចូរគណនា $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ និង $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ។

ខ. ចូរកំណត់ថាតើបកាសន៍ $n+2021 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ និង $0 \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ជាបកាសន៍ពិត ឬ មិនពិត។

ចម្លើយ

ក. គណនា $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ និង $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ។

យើងមាន $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots$ ។

យើងបាន៖

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots$$

$$= \{1,\,2,\,\ldots\,,\,n\,,\,n+1,\,\ldots\} = \mathbb{N}$$

និង $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots$

$= A_1 = \{1\}$ ។

ដូចនេះ $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$ និង $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{1\}$ ។

ខ. តាមសំណួរ ក យើងបានបកាសន៍ $n+2021 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ជាបកាសន៍ពិត និង

$0 \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ជាបកាសន៍មិនពិត។

ប្រតិបត្តិ

គេឱ្យ $I = \mathbb{N}$ និង $A_i = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1-(1/2)^i\}$ ។

ក. គណនា $\bigcup_{i \in I} A_i$ និង $\bigcap_{i \in I} A_i$ ។

ខ. ចូរកំណត់ថាតើបកាសន៍ $0.999 \in \bigcup_{i \in I} A_i$ និង $0.51 \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ជាបកាសន៍ពិត ឬ មិនពិត។

ជំពូកទី ៤

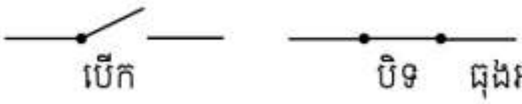
ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងសៀគ្វីតក្កៈឌីជីថល

Using Logic in Digital Logic Circuits

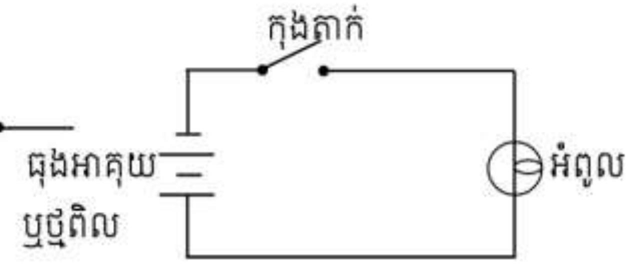
នៅក្នុងជំពូកទី៤នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាសម្រាប់សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថល ប្រអប់ខ្មៅប្រក កន្សោមប៊ូល និង ពីជគណិតប៊ូលដូចតទៅ៖

៤.១ សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថល

ក្នុងទសវត្សរ៍ឆ្នាំ 1930 និស្សិតថ្នាក់បញ្ចប់វ័យក្មេងម្នាក់ឈ្មោះ Claude Shannon បានសង្កេតមើលអាណាឡូករវាងដំណើរការនៃគ្រឿងឧបករណ៍ភ្លើង (Switching Devices) និង ប្រមាណវិធីនៃឈ្នាប់តក្កវិទ្យា។ លោកបានប្រើប្រាស់អាណាឡូកនេះដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហានៃឌីហ្សាញសៀគ្វី (Circuit Design) រហូតបានជោគជ័យ និង បានសរសេរអំពីលទ្ធផលនេះក្នុងសារណាថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រជាន់ខ្ពស់របស់លោកដែលបានបោះពុម្ពឆ្នាំ 1938 ។ យើងនឹងសិក្សានូវទ្រឹស្តីរបស់លោកអំពី សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថល ។ ឥឡូវនេះ យើងពិនិត្យមើលរូបពីរខាងក្រោម ។



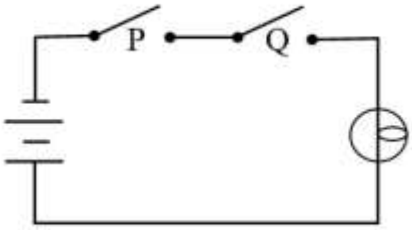
រូបទី១



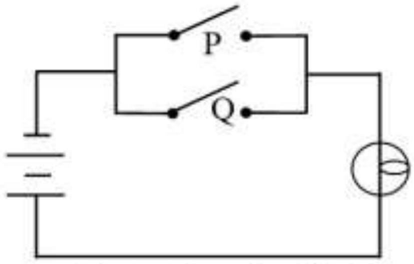
រូបទី២

ការសង់រូបទី១ បង្ហាញអំពីរូបរាងក្រៅនៃទីតាំងពីររបស់កុងតាក់ (Switch) ។ នៅពេលដែលកុងតាក់បិទ នោះចរន្តអាចលំហូរពីចំណុចចុងមួយទៅចំណុចចុងមួយទៀត ហើយនៅពេលដែលកុងតាក់បើក នោះចរន្តមិនអាចលំហូរបានទេ។ គេប្រឱតថា កុងតាក់នេះជាផ្នែកមួយនៃសៀគ្វីដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី២។ អំពូលភ្លើងបើកភ្លើង កាលណាចរន្តមានលំហូរ (រត់) ឆ្លងកាត់វា កាលណា កុងតាក់បិទ ។

បន្ទាប់មក យើងពិនិត្យសៀគ្វីពិបាកជាងមុននៃរូបទី៣ និង រូបទី៤ខាងក្រោម។



រូបទី៣៖ កុងតាក់តជាស៊េរី



រូបទី៤៖ កុងតាក់តជាខ្នែង

ក្នុងសៀគ្វីនៃរូបទី៣ ចរន្តមានលំហូរ និង អំពូលបើកភ្លើង កាលណា កុងតាក់ទាំងពីរ A និង B បានបិទ។ កុងតាក់ក្នុងសៀគ្វីនេះ ហៅថា បង្គុំជាស៊េរី (in series)។ ក្នុងសៀគ្វីនៃរូបទី៤ ចរន្តមានលំហូរ និង អំពូលបើកភ្លើង កាលណា កុងតាក់ទាំងពីរ A និង B បានបិទយ៉ាងតិចមួយ។ កុងតាក់ក្នុងសៀគ្វីនេះ ហៅថា បង្គុំជាខ្នែង (in parallel) ។ លក្ខណៈដែលអាចកើតមានទាំងអស់នៃសៀគ្វីទាំងពីរបានពិពណ៌នាក្នុងតារាងខាងក្រោម។

តារាងទី១៖ កុងតាក់តជាស៊េរី

កុងតាក់		អំពូលភ្លើង
A	B	សភាព (State)
បិទ	បិទ	មានភ្លើង
បិទ	បើក	គ្មានភ្លើង
បើក	បិទ	គ្មានភ្លើង
បើក	បើក	គ្មានភ្លើង

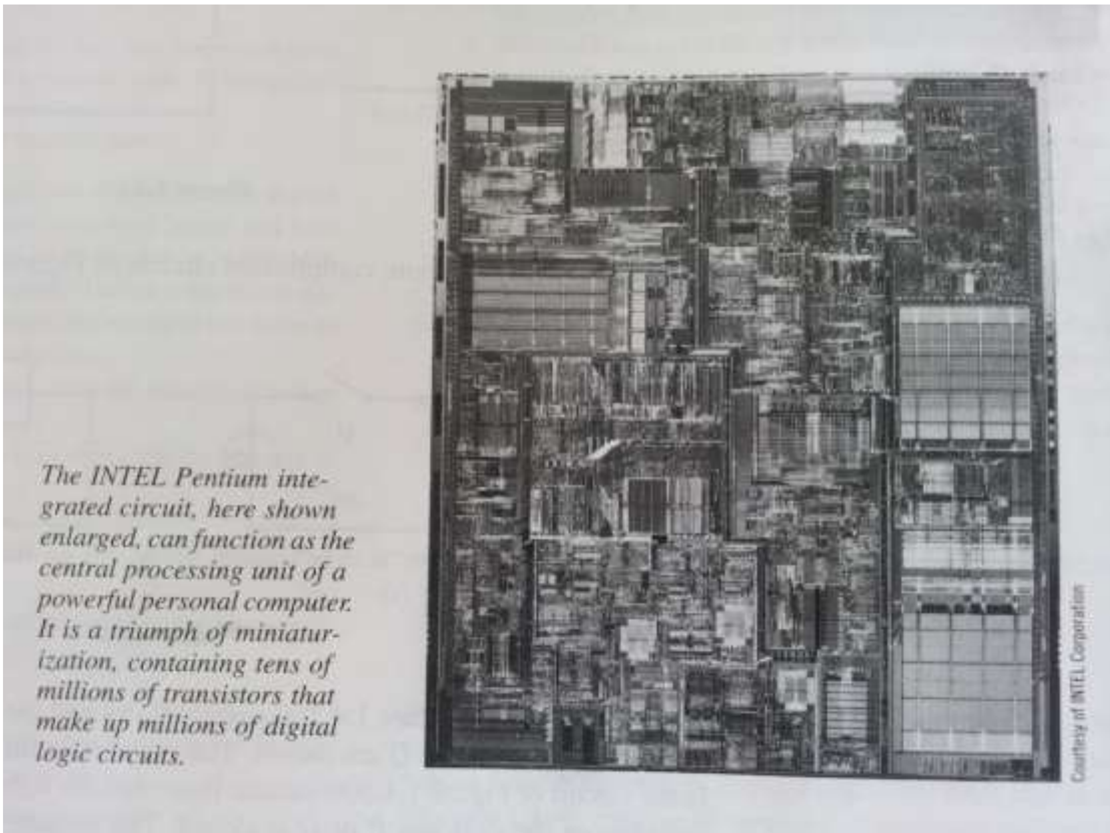
តារាងទី២៖ កុងតាក់តជាខ្នែង

កុងតាក់		អំពូលភ្លើង
A	B	សភាព (State)
បិទ	បិទ	មានភ្លើង
បិទ	បើក	មានភ្លើង
បើក	បិទ	មានភ្លើង
បើក	បើក	គ្មានភ្លើង

យើងសង្កេតឃើញថា ប្រសិនបើពាក្យ បិទ និង មានភ្លើង ជំនួសដោយ 1 និងពាក្យ បើក និង គ្មានភ្លើង ជំនួសដោយ 0 នោះតារាងទី១ក្លាយជាតារាងភាពពិតចំពោះឈ្នាប់ និង ($\wedge$) ហើយតារាងទី២ក្លាយជាតារាងភាពពិតចំពោះឈ្នាប់ ឬ ($\vee$) ។ ជាបន្ត សៀគ្វីកុងតាក់ (Switching Circuit) នៃរូបទី៣ត្រូវគ្នានឹងកន្សោមតក្កវិទ្យា $A \wedge B$ និងសៀគ្វីកុងតាក់នៃរូបទី៤ត្រូវគ្នានឹងកន្សោមតក្កវិទ្យា $A \vee B$ ។

សៀគ្វីដ៏ស្មុគស្មាញជាច្រើនត្រូវគ្នានឹងកន្សោមតក្កវិទ្យាដ៏ស្មុគស្មាញដូចគ្នាដែរ។ ភាពត្រូវគ្នានេះត្រូវគេប្រើប្រាស់យ៉ាងទូលំទូលាយក្នុងផ្នែកឌីហ្សាញនិងការសិក្សាអំពីសៀគ្វី។ ក្នុងទសវត្សរ៍ឆ្នាំ 1940 និង 1950 កុងតាក់ត្រូវបានគេជំនួសដោយគ្រឿងឧបករណ៍អគ្គិសនីជាមួយសភាពរូបវិទ្យា (Physical States) នៃបិទនិងបើក ដែលត្រូវគ្នានឹងសភាពអគ្គិសនីមានដូចជាតង់ស្យុងខ្ពស់និងទាប។ បច្ចេកវិទ្យាអគ្គិសនីថ្មីៗនាំទៅរកការអភិវឌ្ឍនៃប្រព័ន្ធឌីជីថលទំនើបមានដូចជា កុំព្យូទ័រ អេឡិចត្រូនិក ប្រព័ន្ធកុងតាក់ទូរសព្ទអេឡិចត្រូនិក

(Electronic Telephone Switching Systems) ការត្រួតពិនិត្យភ្លើងចរាចរ ម៉ាស៊ីនគិតលេខអេឡិចត្រូនិក និង គ្រឿងយន្តត្រួតពិនិត្យ ត្រូវបានគេប្រើប្រាស់រាប់រយប្រភេទនៃបរិក្ខារអគ្គិសនី។ សមាសភាពអគ្គិសនីមូលដ្ឋាន នៃប្រព័ន្ធឌីជីថល ហៅថា សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថល (Digital Logic Circuits) ។

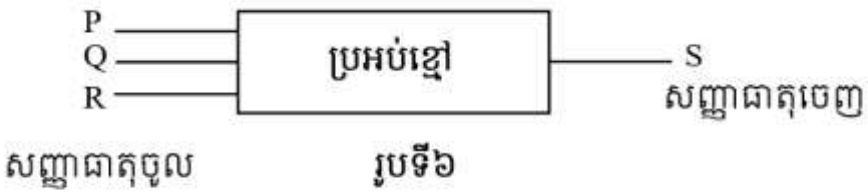


រូបទី៥៖ សៀគ្វី INTEL Pentium

៤.២ ប្រអប់ខ្មៅ និង ច្រក

វិស្វករអគ្គិសនីបានបន្តការប្រើប្រាស់ភាសាតក្កវិទ្យា ពេលណាគេសំដៅទៅនឹងតម្លៃនៃសញ្ញាដែលបង្កើត ដោយកុងតាក់អគ្គិសនី (Electronic Switch) គឺ ពិត (1) ឬ មិនពិត (0) ។ និមិត្តសញ្ញា 0 និង 1 ហៅថា ប៊ីត (bits) ដែលជាទម្រង់ខ្លីនៃតួលេខប្រព័ន្ធគោលពីរ (Binary Digits) ។ ពាក្យបច្ចេកទេសនេះបាននាំឱ្យគេប្រើប្រាស់ដោយអ្នកស្ថិតិឈ្មោះ John Tukey (1915-2000) ក្នុងឆ្នាំ 1946 ។

បន្សំនៃសញ្ញាប៊ីត (1 និង 0) អាចបម្លែងទៅជាបន្សំផ្សេងទៀតនៃសញ្ញាប៊ីត (1 និង 0) ដោយដាក់សញ្ញា តាមសៀគ្វីនានា។ វិស្វករកុំព្យូទ័រ និង អ្នកឌីហ្សាញប្រព័ន្ធឌីជីថលបានធ្វើការស្វែងរកវត្ថុមួយដ៏មានប្រយោជន៍ ដោយរិះគិតអំពីសៀគ្វីមូលដ្ឋានពិតប្រាកដគឺ ប្រអប់ខ្មៅ (Black Boxes) ។ នៅខាងក្នុងនៃប្រអប់ខ្មៅមានការ ប្រតិបត្តិគ្រប់សព្វនៃសៀគ្វី និង ជាញឹកញាប់វាមិនអើពើដឹងខណៈដែលការប្រុងប្រយ័ត្នយកចិត្តទុកដាក់នឹង ទំនាក់ទំនងរវាងសញ្ញាធាតុចូល (Input Signal) និង សញ្ញាធាតុចេញ (Output Signal) ។



រូបទី៦

ដំណើរការនៃប្រអប់ខ្មៅបានបញ្ជាក់យ៉ាងពេញលេញដោយសំណង់តារាងជាតុចូល/ជាតុចេញ (Input/Outout Table) ដែលរាយបញ្ជីនូវសញ្ញាជាតុចូលរួមគ្នាដែលអាចកើតមានទាំងអស់ត្រូវគ្នានឹងជាតុចេញរបស់ពួកវា។ ជាឧទាហរណ៍ ប្រអប់ខ្មៅបង្ហាញរូបទី៦ខាងលើមានសញ្ញាជាតុចូលបី។ ដោយសារសញ្ញាជាតុចូលនីមួយៗអាចយកតម្លៃ 1 ឬ 0 នោះវាមានបន្សំនៃសញ្ញាជាតុចូល ៨ ករណី ដែលយើងបានបង្ហាញក្នុងតារាងទី៣ខាងក្រោម។

តារាងទី៣ (តារាងជាតុចូល/ជាតុចេញ)

ជាតុចូល			ជាតុចេញ
A	B	C	T
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

ជាឧទាហរណ៍ តាមជួរដេកទី៥នៃតារាងទី៣បង្ហាញប្រាប់ថា ចំពោះជាតុចូល A = 0 , B = 1 និង C = 1 នោះជាតុចេញ T = 0 ។

ជាបន្ត យើងនឹងសិក្សាសៀគ្វីបីគឺ ច្រក NOT ច្រក AND និង ច្រក OR ។

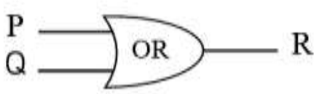
ច្រក NOT (NOT-gate or Inverter) ជាសៀគ្វីដែលមានសញ្ញាជាតុចូលមួយ និង សញ្ញាជាតុចេញមួយ។ ប្រសិនបើសញ្ញាជាតុចូលស្មើនឹង 1 នោះសញ្ញាជាតុចេញស្មើនឹង 0 ។ ប្រាសមកវិញ ប្រសិនបើសញ្ញាជាតុចូលស្មើនឹង 0 នោះសញ្ញាជាតុចេញស្មើនឹង 1 ។ អំពើ (Action) នៃច្រក NOT លើសញ្ញាត្រូវគ្នានឹងឈ្នាប់តក្កវិទ្យា គឺ ឈ្នាប់មិន (¯ , ¬) ។

ច្រក AND (AND-gate) ជាសៀគ្វីដែលមានសញ្ញាធាតុចូលពីរ និង សញ្ញាធាតុចេញមួយ។ ប្រសិនបើសញ្ញាធាតុចូលទាំងពីរស្មើនឹង 1 នោះសញ្ញាធាតុចេញស្មើនឹង 1 ។ ករណីផ្សេងនេះ សញ្ញាធាតុចេញស្មើនឹង 0 ។ អំពើនៃច្រក AND លើសញ្ញាត្រូវគ្នានឹងឈ្នាប់តក្កវិទ្យាគឺ ឈ្នាប់និង ($\wedge$) ។

ច្រក OR (OR-gate) ជាសៀគ្វីដែលមានសញ្ញាធាតុចូលពីរ និង សញ្ញាធាតុចេញមួយ។ ប្រសិនបើសញ្ញាធាតុចូលទាំងពីរស្មើនឹង 0 នោះសញ្ញាធាតុចេញស្មើនឹង 0 ។ ករណីផ្សេងនេះ សញ្ញាធាតុចេញស្មើនឹង 1 ។ អំពើនៃច្រក OR លើសញ្ញាត្រូវគ្នានឹងឈ្នាប់តក្កវិទ្យាគឺ ឈ្នាប់ឬ ($\vee$) ។

អំពើនៃច្រកទាំងបីបានសង្ខេបក្នុងតារាងទី៤ ដែល A និង B តាងជាសញ្ញាធាតុចូល និង T តាងជាសញ្ញាធាតុចេញ។

តារាងទី៤

<table>
<tr><th>ប្រភេទនៃច្រក</th><th>ការតំណាងនិមិត្តសញ្ញា</th><th>អំពើ</th></tr>
<tr><td>NOT</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th>ធាតុចូល</th><th>ធាតុចេញ</th></tr>
<tr><td>P</td><td>R</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>AND</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">ធាតុចូល</th><th>ធាតុចេញ</th></tr>
<tr><td>P</td><td>Q</td><td>R</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>OR</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">ធាតុចូល</th><th>ធាតុចេញ</th></tr>
<tr><td>P</td><td>Q</td><td>R</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

ច្រកអាចធ្វើជាបន្សំគ្នាក្នុងសៀគ្វីជាច្រើនទៅតាមវិធីខុសៗគ្នា។ យើងមានវិធាននៃសៀគ្វីបន្សំ (Combinational Circuit) ដូចតទៅ៖

១. មិនដែលបានផ្សំគ្នានូវខ្សែជាតុចូលចំនួនពីរ។

២. ខ្សែជាតុចូលតែមួយគត់ដែលអាចបំបែកផ្លូវនិងត្រូវបានប្រើប្រាស់វាជាជាតុចូល សម្រាប់ច្រកចំនួនពីរដាច់ដោយឡែក។

៣. ខ្សែជាតុចេញមួយអាចឱ្យគេប្រើប្រាស់ជាជាតុចូល។

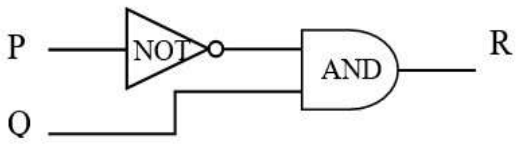
៤. មិនមានជាតុចេញនៃច្រកមួយដែលនៅទីបំផុតអាចផ្តល់លទ្ធផលត្រឡប់ចូលទៅក្នុងច្រកនោះទេ។

វិធានទី៤ ត្រូវបានប្រព្រឹត្តនៅក្នុងសៀគ្វីស្មុគស្មាញកាន់តែច្រើន ហៅថា សៀគ្វីស៊ីត (Sequential Circuits) ដែលជាតុចេញរបស់វានៅខណៈពេលណាមួយអាស្រ័យទាំងពីរលើជាតុចូលនៅខណៈនោះ និងលើជាតុចូលមុនៗផងដែរ។

ប្រសិនបើយើងឱ្យសំណុំនៃសញ្ញាជាតុចូលចំពោះសៀគ្វីមួយ នោះយើងអាចរកជាតុចេញរបស់វាតាមការធ្វើដានពីច្រកមួយទៅច្រកមួយនៃសៀគ្វី។

ឧទាហរណ៍ ចូរបង្ហាញប្រាប់នូវជាតុចេញនៃសៀគ្វីដែលបានបង្ហាញខាងក្រោម ដោយដឹងនូវសញ្ញាជាតុចូល។

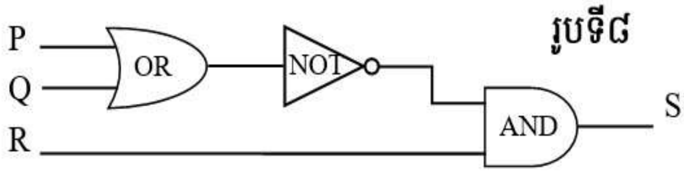
ក. សញ្ញាជាតុចូល P = 1 និង Q = 1



រូបទី៧

ខ. សញ្ញាជាតុចូល P = 0 , Q = 1 និង R = 1

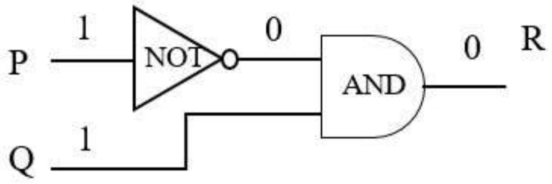
រូបទី៨



ចម្លើយ

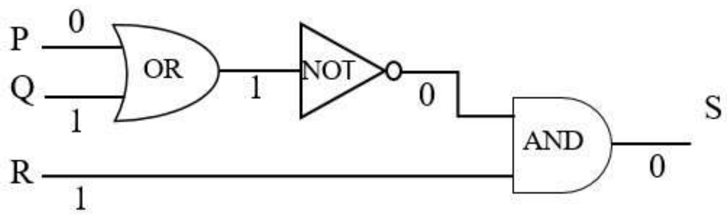
ក. ផ្លាស់ទីពីឆ្វេងទៅស្តាំតាមដ្យាក្រាម ដោយសរសេរអំពើនៃច្រកនីមួយៗលើសញ្ញាជាតុចូល។ ច្រក NOT ប្តូរ P = 1 ទៅជា 0 ហើយជាតុចូលទាំងពីរឆ្លងកាត់ច្រក AND ស្មើនឹង 0 ។ ដូចនេះ ជាតុចេញ R = 0 ដូចបាន

បង្ហាញក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖



រូបទី៩

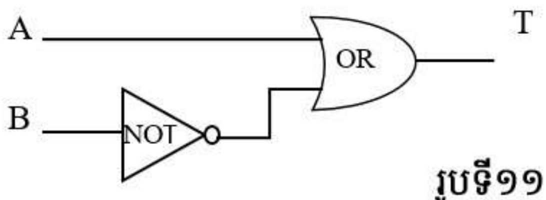
ខ. ជាតុចេញនៃច្រក OR ស្មើនឹង 1 ពីព្រោះសញ្ញាជាតុចូលមួយគឺ Q = 1 ។ ច្រក NOT ប្តូរពី 1 ទៅជា 0 នាំឱ្យជាតុចូលទាំងពីរស្មើនឹង 0 និង R = 1 ឆ្លងកាត់តាមច្រក AND ផ្តល់ឱ្យជាតុចេញ S = 0 ។



រូបទី១០

ដើម្បីសង់តារាងជាតុចូល/ជាតុចេញទាំងមូលនៃសៀគ្វីមួយ យើងធ្វើដានតាមសៀគ្វីនេះ ដោយរកសញ្ញាជាតុចេញត្រូវគ្នាចំពោះបន្សំនីមួយៗនៃសញ្ញាជាតុចូលដែលអាចមាន។

ឧទាហរណ៍ ចូរសង់តារាងជាតុចូល/ជាតុចេញនៃសៀគ្វីដូចខាងក្រោម៖



រូបទី១១

ចម្លើយ

យើងរាយបញ្ជីនូវបន្សំដែលអាចមានទាំងបួននៃសញ្ញាជាតុចូល និង រកជាតុចេញនីមួយៗដោយការធ្វើដានតាមសៀគ្វីខាងលើ។ យើងអាចសង់តារាងជាតុចូល/ជាតុចេញខាងក្រោម។

តារាងទី៥ (តារាងធាតុចូល/ធាតុចេញ)

ធាតុចូល		ធាតុចេញ
A	B	T
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

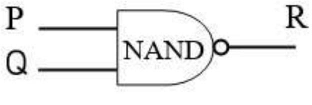
យើងមានសៀគ្វីពីរទៀតគឺ ច្រក NAND និង ច្រក NOR ។

ច្រក NAND (NAND-gate) ជាច្រកតែមួយគត់ដែលមានអំពើដូចច្រក AND ទៅតាមច្រក NOT ។ ប្រសិនបើសញ្ញាធាតុចូលទាំងពីរស្មើនឹង 1 នោះសញ្ញាធាតុចេញស្មើនឹង 0 ។ ករណីផ្សេង ពីនេះ សញ្ញាធាតុចេញស្មើនឹង 1 ។ អំពើនៃច្រក NAND លើសញ្ញាត្រូវគ្នានឹងឈ្នាប់តក្កវិទ្យាគឺ ឈ្នាប់ Sheffer stroke (|) ដែលបានតាងវាដោយលោក H. M. Sheffer (1882-1964) ។

ច្រក NOR (NOR-gate) ជាច្រកតែមួយគត់ដែលមានអំពើដូចច្រក OR ទៅតាមច្រក NOT ។ ប្រសិនបើសញ្ញាធាតុចូលទាំងពីរស្មើនឹង 0 នោះសញ្ញាធាតុចេញស្មើនឹង 1 ។ ករណីផ្សេងពីនេះ សញ្ញាធាតុចេញស្មើនឹង 0 ។ អំពើនៃច្រក NOR លើសញ្ញាត្រូវគ្នានឹងឈ្នាប់តក្កវិទ្យាគឺ ឈ្នាប់ Peirce arrow (↓) ដែលបានតាងវាដោយលោក C. S. Peirce (1839-1914) ។

អំពើនៃច្រកទាំងពីរបានសង្ខេបក្នុងតារាងទី៦ ដែល A និង B តាងជាសញ្ញាធាតុចូល និង T តាងជាសញ្ញាធាតុចេញ។

តារាងទី៦

<table>
<tr><th>ប្រភេទនៃច្រក</th><th>ការតំណាងនិមិត្តសញ្ញា</th><th>អំពើ</th></tr>
<tr><td>NAND</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">ធាតុចូល</th><th>ធាតុចេញ</th></tr>
<tr><td>P</td><td>Q</td><td>R = P | Q</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

NOR		(see truth table below)

ធាតុចូល		ធាតុចេញ
P	Q	$R = P\downarrow Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

និយមន័យ

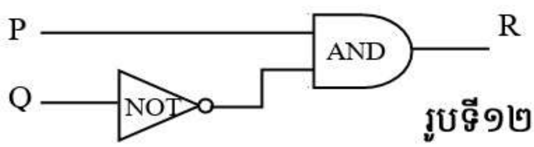
សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថលពីរសមមូលគ្នា លុះត្រាតែ តារាងធាតុចូល/ធាតុចេញរបស់វាដូចគ្នា។

ជាឧទាហរណ៍ តាមសញ្ញាធាតុចេញនៃ $A|B$ និង $A\downarrow B$ នៃតារាងទី៦ផ្តល់ឱ្យ

$A|B \equiv \overline{A\wedge B}$ និង $A\downarrow B \equiv \overline{A\vee B}$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. ចូរសង់តារាងធាតុចូល/ធាតុចេញនៃសៀគ្វីដូចខាងក្រោមៈ



រូបទី១២

២. ចូរសង់សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថលនៃ $S = B\vee(A|B)$ ។

៤.៣ កន្សោមប៊ូលត្រូវគ្នានឹងសៀគ្វី

ក្នុងតក្កវិទ្យា អថេរ a , b និង d តាងឱ្យបកាសន៍ និង បកាសន៍មួយអាចមានតម្លៃភាពពិតគឺ ពិត (1) ឬ មិនពិត (0)។ ទម្រង់បកាសន៍ ជាកន្សោមមួយ ជាឧទាហរណ៍ដូចជា $b\vee(\bar{a}\wedge d)$ ដែលក្នុងនោះមានអថេរបកាសន៍ និង ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា។

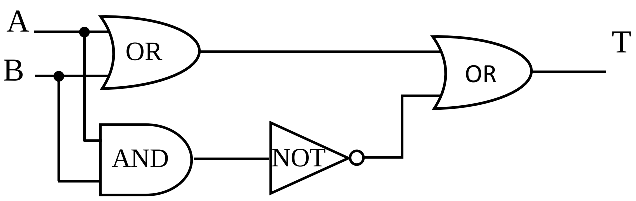
តាមកំណត់ត្រាមុនៗមក លោកប៊ូល (George Boole : 1815 - 1864) ជាគណិតវិទូ ជនជាតិអង់គ្លេស។ គាត់ជាអ្នកបង្កើតម្នាក់ក្នុងចំណោមអ្នកបង្កើតទាំងឡាយអំពីនិមិត្តសញ្ញាតក្កវិទ្យា។ ជាកិត្តិយស គាត់បានសិក្សាអំពីអថេរណាមួយ ដូចជាអថេរបកាសន៍ ឬ សញ្ញាធាតុចូល ដែលអាចយកតម្លៃមួយនៃតម្លៃទាំងពីរគឺ 1

ឬ 0 ហៅថា អថេរប៊ូល (Boolean Variable) ។ កន្សោមមួយដែលមានអថេរប៊ូល និង ឈ្នាប់ $^{-}$, $\wedge$ និង $\vee$ ហៅថា កន្សោមប៊ូល (Boolean Expression) ។ ជាឧទាហរណ៍ដូចជាកន្សោម $T=T(a,b)=a\wedge(\bar{a}\vee b)$ ជាកន្សោមប៊ូល ដែលមានអថេរប៊ូលគឺ a និង b ហើយ $S=S(p,q,r)=p\vee(q\wedge r)$ ជាកន្សោមប៊ូល ដែលមានអថេរប៊ូលគឺ p , q និង r ។

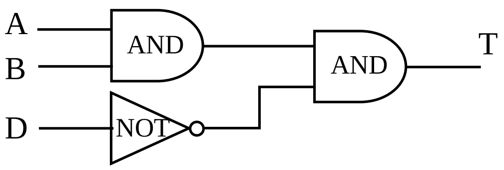
គេឱ្យសៀគ្វីមួយដែលមានបន្សំដោយច្រក NOT ច្រក AND និង ច្រក OR នោះកន្សោមប៊ូលដែលត្រូវនឹងសៀគ្វីនេះអាចកំណត់បានតាមការធ្វើដាននៃអំពើរបស់ច្រកទាំងឡាយនៃអថេរជាតុចូល។

ឧទាហរណ៍ ចូររកកន្សោមប៊ូលដែលត្រូវគ្នានឹងសៀគ្វីខាងក្រោម៖

ក. **រូបទី១៣**

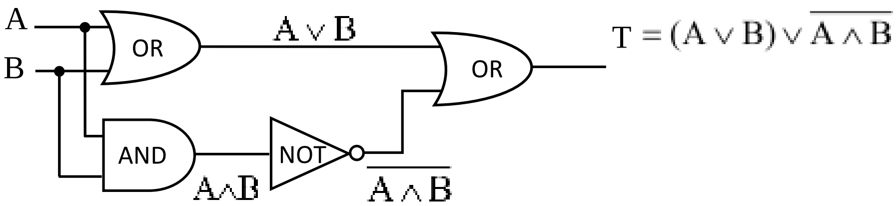


ខ. **រូបទី១៤**



ចម្លើយ

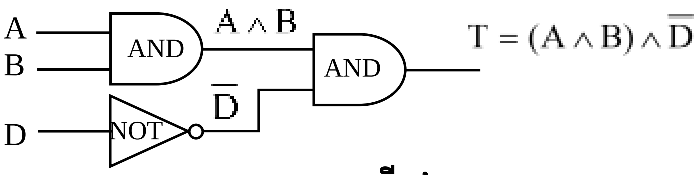
ក. យើងធ្វើដានតាមសៀគ្វីនៃរូបទី១៣ពីឆ្វេងទៅស្តាំ ដោយចង្អុលប្រាប់នូវជាតុចេញនៃច្រកនីមួយៗដូចមានបង្ហាញខាងក្រោម។



រូបទី១៥

ដូចនេះ កន្សោមប៊ូលដែលត្រូវការគឺ $T=(A\vee B)\vee\overline{A\wedge B}$ ។

ខ. កន្សោមប៊ូលដែលត្រូវគ្នានឹងសៀគ្វីនៃរូបទី១៤គឺ $T=(A\wedge B)\wedge\overline{D}$ ។



រូបទី១៦

សម្គាល់

១. ចំពោះកន្សោមប៊ូល គេអាចនិយាយថា វាជាអនុគមន៍ប៊ូលក៏បានដែរ។

២. ក្នុងសៀវភៅខ្លះ គេអាចជំនួសឈ្នាប់ឬ ($\vee$) ដោយនិមិត្តសញ្ញាបូក ($+$) និង ជំនួសឈ្នាប់ និង ($\wedge$) ដោយនិមិត្តសញ្ញាគុណ ($\cdot$) ។ ជាឧទាហរណ៍ដូចជាកន្សោមប៊ូល $b\vee(\bar{a}\wedge d)$ អាចសរសេរជា $b+(\bar{a}\cdot d)$ ឬ $b+\bar{a}d$ ។ យើងនឹងប្រើប្រាស់និមិត្តសញ្ញាទាំងពីរនេះក្នុងផ្នែក ៤.៤ ។

និយមន័យ

សៀគ្វីទទួលស្គាល់ (Recognizer) ជាសៀគ្វីដែលមានសញ្ញាជាតុចេញស្មើនឹង 1 ចំពោះបន្សំពិសេសមួយគត់និងមានសញ្ញាជាតុចេញស្មើនឹង 0 ចំពោះបន្សំផ្សេងទៀតទាំងអស់នៃសញ្ញាជាតុចូល។

ឧទាហរណ៍ ចូរបង្ហាញថា កន្សោមប៊ូលដែលត្រូវគ្នានឹងសៀគ្វីនៃរូបទី១៤ គឺជាសៀគ្វីទទួលស្គាល់។

ចម្លើយ

កន្សោមប៊ូលដែលត្រូវគ្នានឹងសៀគ្វីនៃរូបទី១៤គឺ $T=(A\wedge B)\wedge\overline{D}$ ។ បន្ទាប់មក យើងសង់តារាងទី៧ខាងក្រោម។

តារាងទី៧ (តារាងជាតុចូល/ជាតុចេញ)

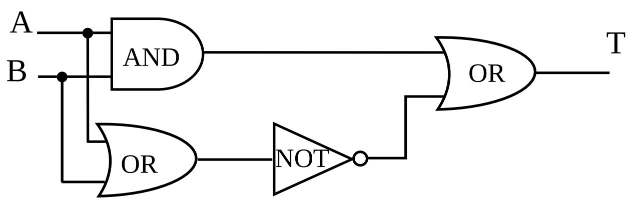
ជាតុចូល			ជាតុចេញ
A	B	D	T
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

តាមតារាងទី៧ខាងលើ កន្សោមប៊ូល $T = (A \wedge B) \wedge \overline{D}$ មានជាតុចេញ 1 តែម្តងគត់ ក្រៅពីនោះ 0 ទាំងអស់ ។ ដូច្នេះ វាជាសៀគ្វីទទួលស្គាល់ ។

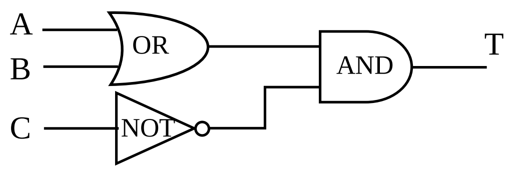
ប្រតិបត្តិ

ចូររកកន្សោមប៊ូលដែលត្រូវគ្នានឹងសៀគ្វីខាងក្រោម៖

ក. **រូបទី១៧**



ខ. **រូបទី១៨**



៤.៤ ពីជគណិតប៊ូល

ក្នុងផ្នែកចុងក្រោយនេះ យើងសិក្សាតែករណីពិសេសនៃទម្រង់ពីជគណិតទូទៅគឺ ពីជគណិតប៊ូល (Boolean Algebra) ។ លក្ខណៈនៃពីជគណិតប៊ូល ត្រូវបានគេប្រើប្រាស់យ៉ាងទូលំទូលាយក្នុងការសម្រួលនៃសៀគ្វីតក្កៈឌីជីថល ។

និយមន័យ

ពីជគណិតប៊ូល ជាសំណុំ B ដែលរួមជាមួយប្រមាណវិធីពីរគឺតាងដោយ + និង $\cdot$ ដែលចំពោះ $\forall\, a\,,\, b \in B$ នាំឱ្យ $a + b \in B$ និង $a \cdot b \in B$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់នូវលក្ខណៈខាងក្រោម៖

១. **លក្ខណៈត្រឡប់៖** ចំពោះ $\forall\, a\,,\, b \in B$,

ក. $a + b = b + a$ និង ខ. $a \cdot b = b \cdot a$ ។

២. **លក្ខណៈផ្តុំ៖** ចំពោះ $\forall\, a\,,\, b\,,\, c \in B$,

ក. $(a + b) + c = a + (b + c)$ និង ខ. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ។

៣. **លក្ខណៈបំបែក៖** ចំពោះ $\forall a, b, c \in B$,

ក. $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$ និង ខ. $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ ។

៤. **លក្ខណៈខ្លួនឯង៖** វាមានធាតុខុសគ្នា 0 និង 1 នៃ B ដែលចំពោះ $\forall a \in B$,

ក. $a+0=a$ និង ខ. $a\cdot 1=a$ ។

៥. **លក្ខណៈបំពេញ៖** ចំពោះធាតុ a នីមួយៗក្នុង B វាមានធាតុមួយក្នុង B តាងដោយ $\bar{a}$ និងវាហៅថា បំពេញឬមិននៃ a ដែល

ក. $a+\bar{a}=1$ និង ខ. $a\cdot\bar{a}=0$ ។

ចំពោះសំណុំនៃទម្រង់បកាសន៍ក្នុងចំនួនរាប់អស់នៃអថេរ ឈ្នាប់ $\vee$ និង $\wedge$ ដើរតួជា + និង $\cdot$ ហើយ បីរសច្ចភាព t និង បីរអសច្ចភាព f ដើរតួជា 1 និង 0 ។ ឥឡូវនេះ យើងនឹងសិក្សានូវលក្ខណៈនៃពីជគណិតប៊ូលមួយចំនួនដែលមាននៅក្នុងទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទ

តាង B ជាពីជគណិតប៊ូលណាមួយ។

១. **ភាពមានតែមួយគត់នៃលក្ខណៈបំពេញ៖** ចំពោះ $\forall a, x \in B$, បើ $a+x=1$ និង $a\cdot x=0$ នោះ $x=\bar{a}$ ។

២. **លក្ខណៈបំពេញទ្វេ៖** ចំពោះ $\forall a \in B$, $\overline{\left(\bar{a}\right)}=a$ ។

៣. **លក្ខណៈអ៊ីដឹមប៉ូតង់៖** ចំពោះ $\forall a \in B$,

ក. $a+a=a$ និង ខ. $a\cdot a=a$ ។

៤. **លក្ខណៈទាល់សាកល៖** ចំពោះ $\forall a \in B$,

ក. $a+1=1$ និង ខ. $a\cdot 0=0$ ។

៥. **លក្ខណៈដឺម៉កង់៖** ចំពោះ $\forall a, b \in B$,

ក. $\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ និង ខ. $\overline{a\cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

១. ស្រាយថា $x=\bar{a}$ ។

ចំពោះ $a, x \in B$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្ម $a+x=1$ និង $a\cdot x=0$ ។

នាំឱ្យ

$x=x\cdot 1=x\cdot(a+\bar{a})$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង និង លក្ខណៈបំពេញ)

$= x\cdot a + x\cdot \bar{a} = a\cdot x + x\cdot \bar{a}$ (លក្ខណៈបំបែក និង លក្ខណៈត្រឡប់)

$= 0 + x\cdot \bar{a} = a\cdot \bar{a} + x\cdot \bar{a}$ (តាមសម្មតិកម្ម និង លក្ខណៈបំពេញ)

$= \bar{a}\cdot a + \bar{a}\cdot x = \bar{a}\cdot (a+x)$ (លក្ខណៈត្រឡប់ និង លក្ខណៈបំបែក)

$= \bar{a}\cdot 1 = \bar{a}$ (តាមសម្មតិកម្ម និង លក្ខណៈខ្លួនឯង)។

ដូចនេះ យើងបាន $x = \bar{a}$ ។

២. ស្រាយថា ចំពោះ $\forall a \in B$, $\overline{\left(\bar{a}\right)} = a$ ។

ឧបមាថា B ជាពីជគណិតប៊ូល និង a ជាធាតុណាមួយនៃ B ។

នាំឱ្យ

$\bar{a} + a = a + \bar{a} = 1$ (លក្ខណៈត្រឡប់ និង លក្ខណៈបំពេញ)

និង

$\bar{a}\cdot a = a\cdot \bar{a} = 0$ (លក្ខណៈត្រឡប់ និង លក្ខណៈបំពេញ)។

នាំឱ្យ a ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការទាំងពីរធៀបនឹង $\bar{a}$ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទថា បំពេញនៃ a មានតែមួយគត់ ។
ដូច្នេះ $\overline{\left(\bar{a}\right)} = a$ ។

៣. ស្រាយថា $a + a = a$ និង $a\cdot a = a$ ។

ឧបមាថា B ជាពីជគណិតប៊ូល និង a ជាធាតុណាមួយនៃ B ។

នាំឱ្យ

$a = a + 0 = a + (a\cdot \bar{a})$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង និង លក្ខណៈបំពេញ)

$= (a+a)\cdot(a+\bar{a}) = (a+a)\cdot 1$ (លក្ខណៈបំបែក និង លក្ខណៈបំពេញ)

$= a + a$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)

ហើយ

$a = a\cdot 1 = a\cdot (a+\bar{a})$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង និង លក្ខណៈបំពេញ)

$= a\cdot a + a\cdot \bar{a} = a\cdot a + 0$ (លក្ខណៈបំបែក និង លក្ខណៈបំពេញ)

$= a\cdot a$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)។

ដូចនេះ យើងបាន $a + a = a$ និង $a\cdot a = a$ ។

៤. ស្រាយថា $a+1=1$ និង $a\cdot 0=0$ ។

ឧបមាថា B ជាពីជគណិតប៊ូល និង a ជាធាតុណាមួយនៃ B ។

នាំឱ្យ

$$a+1=a+(a+\bar{a}) \quad (\text{លក្ខណៈបំពេញ})$$

$$=(a+a)+\bar{a} \quad (\text{លក្ខណៈផ្តុំ})$$

$$=a+\bar{a}=1 \quad (\text{លក្ខណៈអ៊ីដឹមប៉ូតង់ និង លក្ខណៈបំពេញ})$$

ហើយ $a\cdot 0=a\cdot(a\cdot\bar{a})$ (លក្ខណៈបំពេញ)

$$=(a\cdot a)\cdot\bar{a} \quad (\text{លក្ខណៈផ្តុំ})$$

$$=a\cdot\bar{a}=0 \quad (\text{លក្ខណៈអ៊ីដឹមប៉ូតង់ និង លក្ខណៈបំពេញ})។$$

ដូចនេះ យើងបាន $a+1=1$ និង $a\cdot 0=0$ ។

៥. ស្រាយថា $\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ ។

ឧបមាថា B ជាពីជគណិតប៊ូល និង ចំពោះ $a, b\in B$ នាំឱ្យ

$$(a+b)+(\bar{a}\cdot\bar{b})=a+(b+(\bar{a}\cdot\bar{b})) \quad (\text{លក្ខណៈផ្តុំ})$$

$$=a+(b+\bar{a})\cdot(b+\bar{b}) \quad (\text{លក្ខណៈបំបែក})$$

$$=a+(b+\bar{a})\cdot 1 \quad (\text{លក្ខណៈបំពេញ})$$

$$=a+(b+\bar{a}) \quad (\text{លក្ខណៈខ្លួនឯង})$$

$$=(a+b)+\bar{a} \quad (\text{លក្ខណៈផ្តុំ})$$

$$=(b+a)+\bar{a} \quad (\text{លក្ខណៈត្រឡប់})$$

$$=b+(a+\bar{a}) \quad (\text{លក្ខណៈផ្តុំ})$$

$$=b+1=1 \quad (\text{លក្ខណៈបំពេញនិងទាល់សាកល})$$

ហើយ $(a+b)\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot(a+b)$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$$=(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot a+(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot b \quad (\text{លក្ខណៈបំបែក})$$

$$=\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot a)+\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot b) \quad (\text{លក្ខណៈផ្តុំ})$$

$$=\bar{a}\cdot(a\cdot\bar{b})+\bar{a}\cdot(b\cdot\bar{b}) \quad (\text{លក្ខណៈត្រឡប់})$$

$=(\bar{a}\cdot a)\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot 0$ (លក្ខណៈផ្តុំ និង លក្ខណៈបំពេញ)

$=(a\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}+0$ (លក្ខណៈត្រឡប់និងទាល់សាកល)

$=0\cdot\bar{b}$ (លក្ខណៈបំពេញ និង លក្ខណៈខ្លួនឯង)

$=\bar{b}\cdot 0=0$ (លក្ខណៈត្រឡប់ និង លក្ខណៈទាល់សាកល)។

នោះតាមទ្រឹស្តីបទ នាំឱ្យ $a+b$ មានបំពេញតែមួយគត់។

ដូចនេះ យើងបាន $\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូល

$$T=b+a\cdot b\cdot d+\bar{b}\cdot\bar{d}\text{ ។}$$

ចម្លើយ

សម្រួលកន្សោមប៊ូល T ។

យើងមាន៖

$T=b+a\cdot b\cdot d+\bar{b}\cdot\bar{d}$

$=b\cdot 1+b\cdot a\cdot d+\bar{b}\cdot\bar{d}$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង និង លក្ខណៈត្រឡប់)

$=b\cdot(1+a\cdot d)+\bar{b}\cdot\bar{d}$ (លក្ខណៈបំបែក)

$=b\cdot(a\cdot d+1)+\bar{b}\cdot\bar{d}$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$=b\cdot 1+\bar{b}\cdot\bar{d}$ (លក្ខណៈទាល់សាកល)

$=b+\bar{b}\cdot\bar{d}$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)

$=(b+\bar{b})\cdot(b+\bar{d})$ (លក្ខណៈបំបែក)

$=1\cdot(b+\bar{d})$ (លក្ខណៈបំពេញ)

$=(b+\bar{d})\cdot 1$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$=b+\bar{d}$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង) ។

ដូចនេះ យើងបាន $T=b+\bar{d}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូល

$$Y=a\cdot b\cdot c+a\cdot\bar{b}\cdot c+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c+a\cdot b\cdot\bar{c}+a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\text{ ។}$$

ចម្លើយ

សម្រួលកន្សោមប៊ូល Y ។

យើងមាន៖

$$
\begin{aligned}
Y &= a\cdot b\cdot c + a\cdot \overline{b}\cdot c + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c + a\cdot b\cdot \overline{c} + a\cdot \overline{b}\cdot \overline{c} \\
&= (a\cdot c\cdot b + a\cdot c\cdot \overline{b}) + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c + (a\cdot \overline{c}\cdot b + a\cdot \overline{c}\cdot \overline{b}) && \text{(លក្ខណៈត្រឡប់)} \\
&= a\cdot c\cdot (b+\overline{b}) + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c + a\cdot \overline{c}\cdot (b+\overline{b}) && \text{(លក្ខណៈបំបែក)} \\
&= a\cdot c\cdot 1 + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c + a\cdot \overline{c}\cdot 1 && \text{(លក្ខណៈបំពេញ)} \\
&= a\cdot c + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c + a\cdot \overline{c} && \text{(លក្ខណៈខ្លួនឯង)} \\
&= a\cdot c + a\cdot \overline{c} + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c && \text{(លក្ខណៈត្រឡប់)} \\
&= a\cdot (c+\overline{c}) + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c && \text{(លក្ខណៈបំបែក)} \\
&= a\cdot 1 + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c && \text{(លក្ខណៈបំពេញ)} \\
&= a + \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c && \text{(លក្ខណៈខ្លួនឯង)} \\
&= (a+\overline{a})\cdot (a+\overline{b}\cdot c) && \text{(លក្ខណៈបំបែក)} \\
&= 1\cdot (a+\overline{b}\cdot c) && \text{(លក្ខណៈបំពេញ)} \\
&= (a+\overline{b}\cdot c)\cdot 1 && \text{(លក្ខណៈត្រឡប់)} \\
&= a+\overline{b}\cdot c && \text{(លក្ខណៈខ្លួនឯង)។}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ យើងបាន $Y = a+\overline{b}\cdot c$ ។

ប្រតិបត្តិ

ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូលខាងក្រោម៖

ក. $X = a + a\cdot b\cdot d + \overline{b}\cdot \overline{d}$ ។

ខ. $Y = a\cdot c + a\cdot \overline{b}\cdot c + \overline{a}\cdot c + a\cdot b\cdot \overline{c} + a\cdot \overline{b}\cdot \overline{c}$ ។

គ. $f(A, B, C, D) = B + \overline{A}\,\overline{B} + ACD + A\overline{C}$ ។

៤.៥ លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

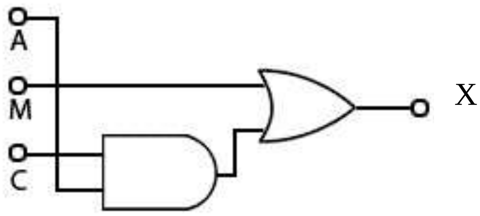
៤.៥.១ លំហាត់

១. ចូរសង់សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថលនៃ $T=(AB)C$ ។

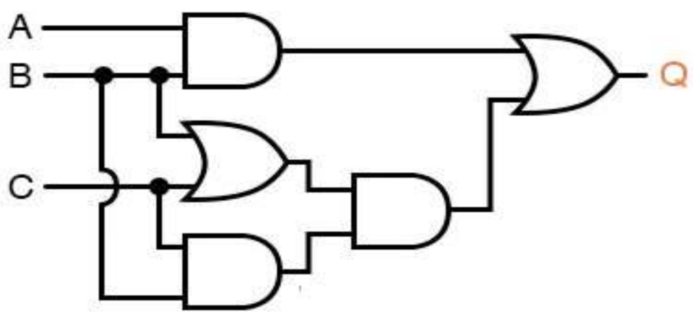
២. ចូរសង់សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថលនៃ $X=A(B+C)$ ។

៣. ចូររកកន្សោមប៊ូលដែលត្រូវគ្នានឹងសៀគ្វីខាងក្រោម៖

ក. **រូបទី១៩**



ខ. **រូបទី២០**



៤. ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូល

$F(A, B, C)=(A+B)\cdot\overline{B}+\overline{B}+B\cdot C$ ។

៥. ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូល

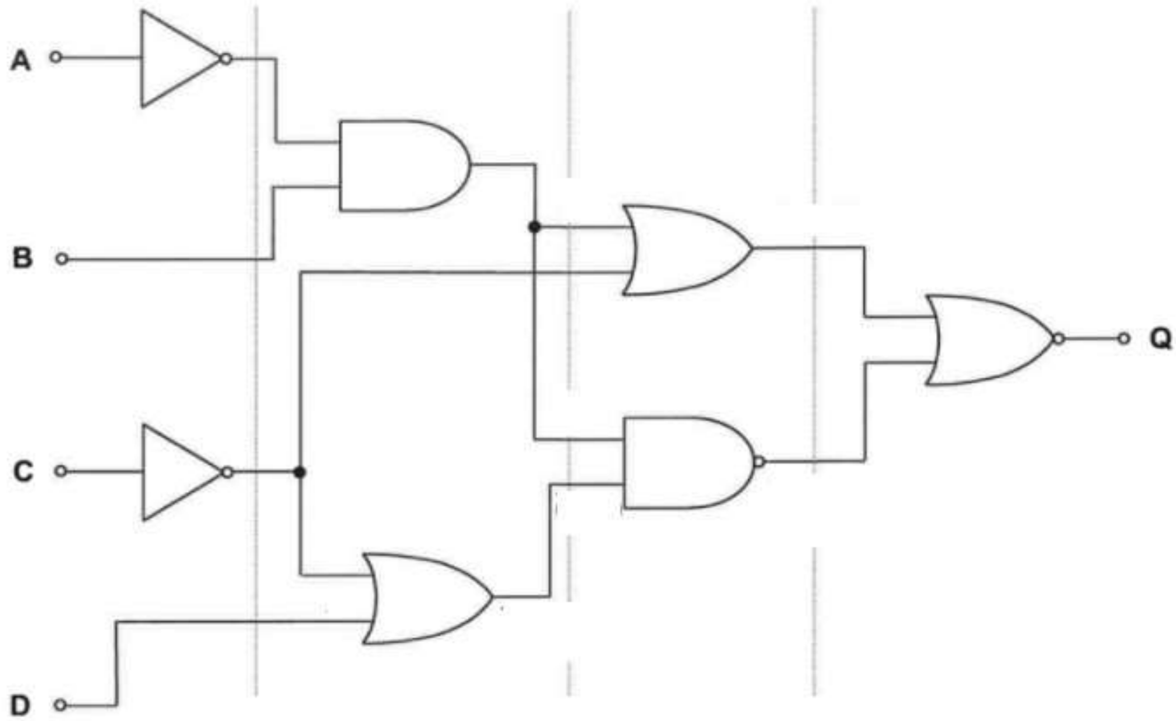
$Q=\overline{A}\cdot B+A\cdot B+C$ ។

៦. ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូល

$f(A, B, C, D)=B+BCD+\overline{B}CD+AB+\overline{A}B+\overline{B}C$ ។

៧. ចូរសង់ដ្យាក្រាមសៀគ្វីនៃកន្សោមប៊ូល $Y=\overline{(A+\overline{B})(\overline{B+C})}$ ។

៨. ចូររកកន្សោមប៊ូលដែលត្រូវគ្នានឹងសៀគ្វីខាងក្រោម៖

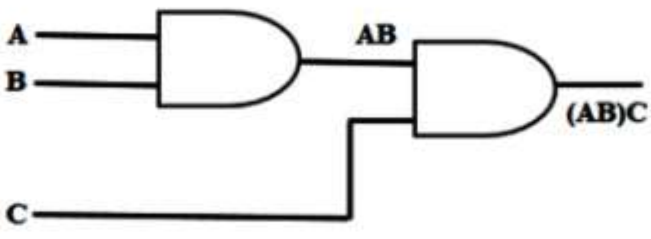


រូបទី២១

៤.៥.២ ដំណោះស្រាយ

១. ចូរសង់សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថលនៃ $T=(AB)C$ ។

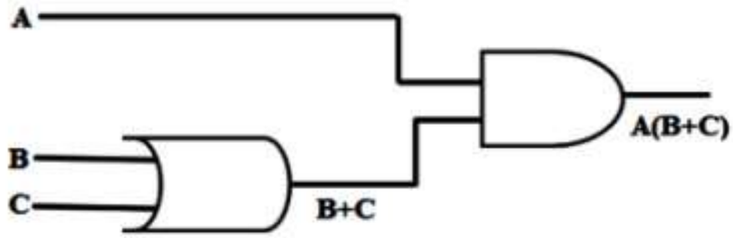
យើងមានធាតុចូលបីគឺ A, B និង C ។ នៅដំណាក់កាលទី១ យើងសង់ច្រក AND នៃធាតុចូលពីរ A និង B ហើយដំណាក់កាលទី២ យើងសង់ច្រក AND ម្ដងទៀតនៃធាតុចូលពីរ AB និង C ។ នោះយើងបានសៀគ្វីតក្កៈឌីជីថលនៃធាតុចេញ $T=(AB)C$ បង្ហាញដូចរូបទី២២ខាងក្រោមនេះ។



រូបទី២២

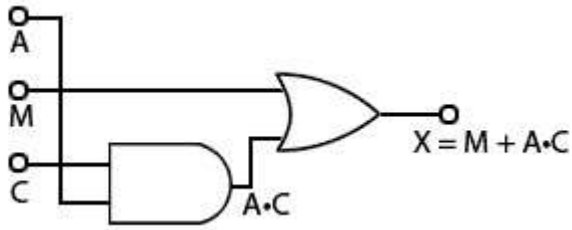
២. ចូរសង់សៀគ្វីតក្កៈឌីជីថលនៃ $X = A(B + C)$ ។

យើងមានជាតុចូលបីគឺ A, B និង C ។ នៅដំណាក់កាលទី១ យើងសង់ច្រក OR នៃជាតុចូលពីរ B និង C ហើយដំណាក់កាលទី២ យើងសង់ច្រក AND ម្តងនៃជាតុចូលពីរ A និង $B + C$ ។ នោះយើងបានសៀគ្វីតក្កៈឌីជីថលនៃជាតុចេញ $X = A(B + C)$ បង្ហាញដូចរូបទី២៣ខាងក្រោមនេះ។



រូបទី២៣

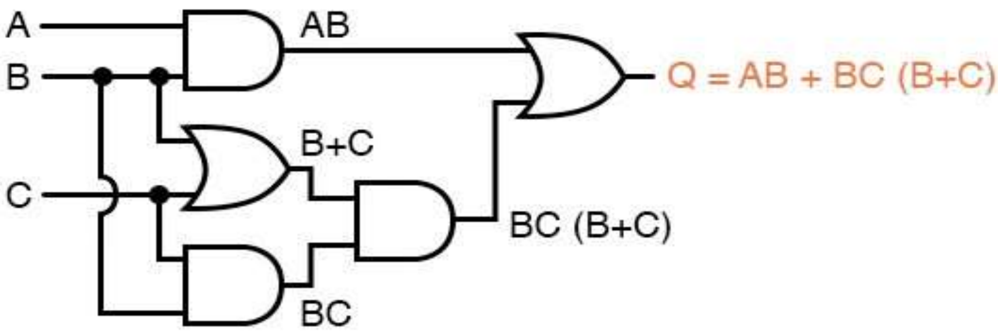
៣. ក. យើងធ្វើដានតាមសៀគ្វីនៃរូបទី១៩ពីឆ្វេងទៅស្តាំ ដោយចង្អុលប្រាប់នូវជាតុចេញនៃច្រកនីមួយៗដូចមានបង្ហាញរូបទី២៤ខាងក្រោម។



រូបទី២៤

ដូចនេះ កន្សោមប៊ូលដែលត្រូវការគឺ $X = M + A \cdot C$ ។

ខ. យើងដំណើរការស្រដៀងគ្នា ដោយធ្វើដានតាមសៀគ្វីនៃរូបទី២០ពីឆ្វេងទៅស្តាំ ដោយចង្អុលប្រាប់នូវជាតុចេញនៃច្រកនីមួយៗដូចមានបង្ហាញរូបទី២៥ខាងក្រោម។



រូបទី២៥

ដូចនេះ កន្សោមប៊ូលដែលត្រូវការគឺ $Q = AB + BC(B + C)$ ។

៤. ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូល $F(A, B, C)$ ។

យើងមាន៖

$$F(A, B, C) = (A+B)\cdot\overline{B} + \overline{B} + B\cdot C$$

$= \overline{B}\cdot(A+B) + (\overline{B}+B)\cdot(\overline{B}+C)$ (លក្ខណៈត្រឡប់ និង លក្ខណៈបំបែក)

$= \overline{B}\cdot A + \overline{B}\cdot B + 1\cdot(\overline{B}+C)$ (លក្ខណៈបំបែក និង លក្ខណៈបំពេញ)

$= \overline{B}\cdot A + 0 + \overline{B} + C$ (លក្ខណៈបំពេញ និង លក្ខណៈខ្លួនឯង)

$= \overline{B}\cdot A + \overline{B}\cdot 1 + C$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)

$= \overline{B}\cdot(A+1) + C$ (លក្ខណៈបំបែក)

$= \overline{B}\cdot 1 + C$ (លក្ខណៈទាល់សាកល)

$= \overline{B} + C$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង) ។

ដូចនេះ យើងបាន $F(A, B, C) = \overline{B} + C$ ។

៥. ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូល Q ។

យើងមាន៖

$$Q = \overline{A}\cdot B + A\cdot B + C$$

$= B\cdot\overline{A} + B\cdot A + C$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$= B\cdot(\overline{A} + A) + C$ (លក្ខណៈបំបែក)

$= B\cdot 1 + C$ (លក្ខណៈត្រឡប់ និង លក្ខណៈបំពេញ)

$= B + C$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង) ។

ដូចនេះ យើងបាន $Q = B + C$ ។

៦. ចូរសម្រួលកន្សោមប៊ូល $f(A, B, C, D)$ ។

យើងមាន៖

$$f(A, B, C, D) = B + BCD + \overline{B}CD + AB + \overline{A}B + \overline{B}C$$

$= B + (CDB + CD\overline{B}) + (BA + B\overline{A}) + \overline{B}C$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$= B + CD(B + \overline{B}) + B(A + \overline{A}) + \overline{B}C$ (លក្ខណៈបំបែក)

$= B + CD\cdot 1 + B\cdot 1 + \overline{B}C$ (លក្ខណៈបំពេញ)

$= B + CD + B + \overline{B}C$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)

$= (B + B) + \overline{B}C + CD$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

$= B + \overline{B}C + CD$ (លក្ខណៈអ៊ីដឹមប៉ូតង់)

$= (B + \overline{B})(B + C) + CD$ (លក្ខណៈបំបែក)

$= 1\cdot(B + C) + CD$ (លក្ខណៈបំពេញ)

$= B + (C\cdot 1 + CD)$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង)

$= B + C(1 + D)$ (លក្ខណៈបំបែក)

$= B + C(D + 1)$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

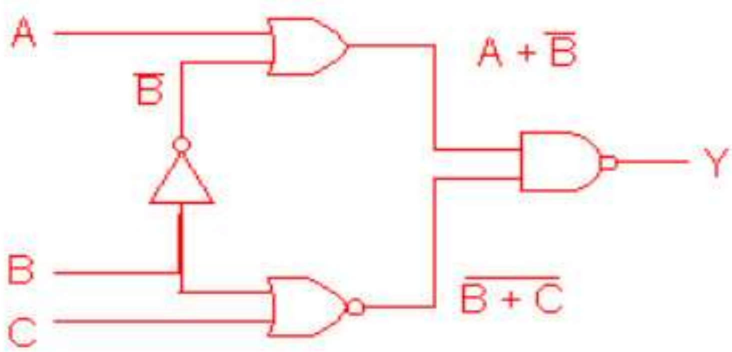
$= B + C\cdot 1$ (លក្ខណៈទាល់សាកល)

$= B + C$ (លក្ខណៈខ្លួនឯង) ។

ដូចនេះ យើងបាន $f(A, B, C, D) = B + C$ ។

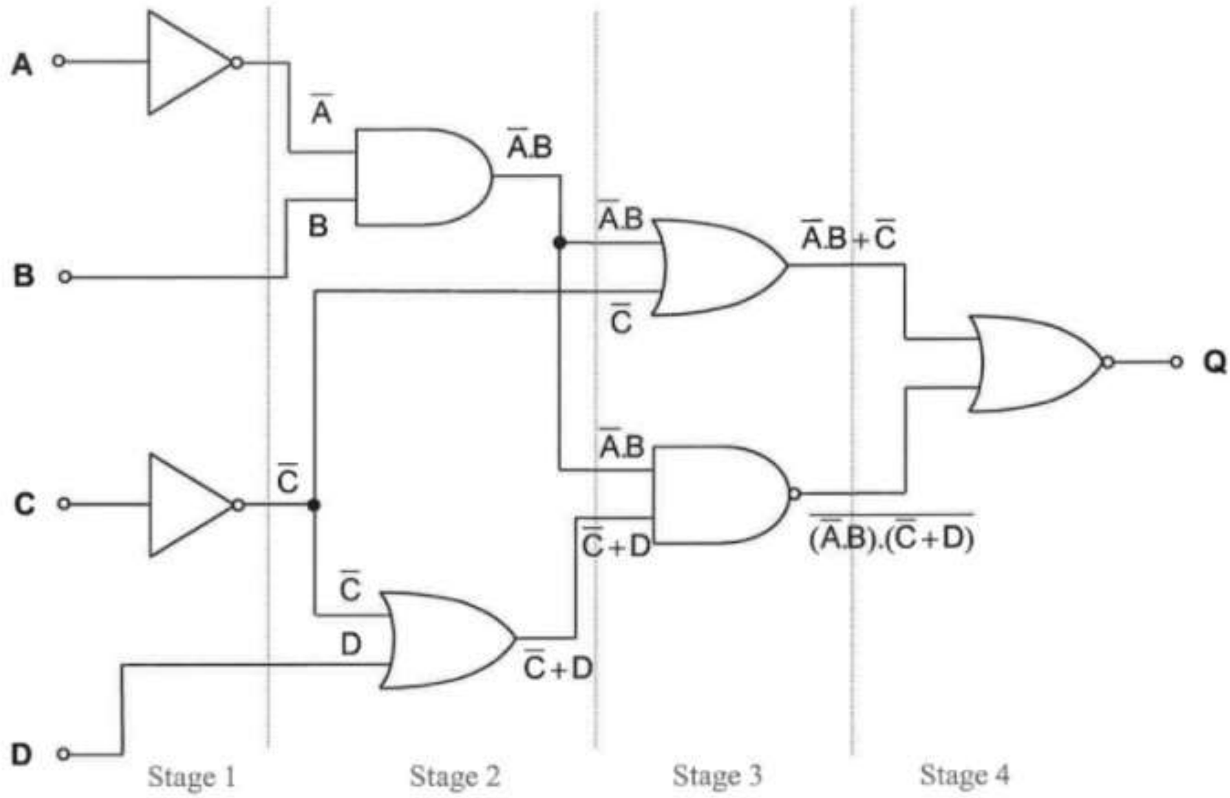
៧. ចូរសង់ដ្យាក្រាមសៀគ្វីនៃកន្សោមប៊ូល $Y = \overline{(A + \overline{B})(\overline{B + C})}$ ។

យើងមានធាតុចូលបីគឺ A, B និង C ។ នៅដំណាក់កាលទី១ យើងសង់ច្រក NOT នៃធាតុចូល B ។ បន្ទាប់មកនៅដំណាក់កាលទី២ យើងសង់ច្រក OR នៃធាតុចូលពីរ A និង $\overline{B}$ ហើយសង់ច្រក NOR នៃធាតុចូលពីរ B និង C ។ ជាចុងក្រោយនៅដំណាក់កាលទី៣ យើងសង់ច្រក NAND នៃធាតុចូលពីរ $A + \overline{B}$ និង $\overline{B + C}$ ។ នោះយើងបានដ្យាក្រាមសៀគ្វីនៃធាតុចេញ $Y = \overline{(A + \overline{B})(\overline{B + C})}$ បង្ហាញដូចរូបទី២៦ខាងក្រោមនេះ។



រូបទី២៦

៨. យើងមានធាតុចូលបួនគឺ A , B , C និង D ហើយជ្រើសរើស៤ដំណាក់កាល (Stage) ។ យើងធ្វើដានតាមសៀគ្វីនៃរូបទី២១ពីឆ្វេងទៅស្តាំតាមដំណាក់កាលទី១ដល់ទី៤ដោយចង្អុលប្រាប់នូវធាតុចេញនៃច្រកនីមួយៗ ដូចមានបង្ហាញរូបទី២៧ខាងក្រោម។



រូបទី២៧

ដូចនេះ កន្សោមប៊ូលដែលត្រូវការគឺ $Q = \overline{(\overline{A}\cdot B + C) + \overline{(\overline{A}\cdot B)\cdot(\overline{C}+D)}}$ ។

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន

បន្ទាប់ពីការអានឬសិក្សាលើសៀវភៅ **តក្កវិទ្យាជាមួយការអនុវត្ត** នេះ សិស្ស និស្សិត និង អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាអាចៈ

- មានការយល់ដឹងច្បាស់គោលការណ៍ក្នុងគណិតវិទ្យាមានៈ ប្រធានបទ ភាសាប្រើ និយមន័យ និមិត្តសញ្ញា ការគណនា ការស្រាយបញ្ជាក់ ទ្រឹស្តីបទ រូបមន្ត លក្ខណៈ លទ្ធផលស្តង់ដា វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយ គុណភាពនិងប្រសិទ្ធភាពក្នុងគណិតវិទ្យា។

- ពង្រឹង និង ពង្រីកបន្ថែមសមត្ថភាពបង្រៀន និង រៀនសិក្សាស្រាវជ្រាវ មានក្បួនខ្នាតដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវ ព្រមទាំងអភិវឌ្ឍបំណិនការគិតរបស់និស្សិតបានសមហេតុផល ដោយមានអំណះអំណាងតាមនិយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ រូបមន្ត លក្ខណៈ លំហាត់អនុវត្តនិងលំហាត់កិច្ចការស្រាវជ្រាវ (ប្រតិបត្តិ) ។

- មានសមត្ថភាពខ្ពស់លើកម្រិតជំនាញវិជ្ជាជីវៈ សម្រាប់សិក្សាស្រាវជ្រាវបន្តតាមបែបវិទ្យាសាស្រ្តនាយុគសម័យបច្ចេកវិទ្យា ដោយពង្រីកបន្ថែមតាមរយៈការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។

- ធ្វើទំនាក់ទំនងអន្តរកម្មវិធីសិក្សាពីគណិតវិទ្យាជាមួយមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្រ្តដូចជា មុខវិជ្ជារូបវិទ្យា វិទ្យាសាស្រ្តកុំព្យូទ័រ និង បច្ចេកវិទ្យានានា ។

- ជាធនធានមនុស្សពេញលេញ មានចំណេះដឹង ចំណេះធ្វើ បំណិនប្រសប់លើមុខជំនាញ ហើយយកជំនាញទាំងនេះទៅអប់រំបង្រៀនមនុស្សជំនាន់ក្រោយ ឱ្យពួកគេយកចំណេះដឹងយកទៅអនុវត្តក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់មនុស្សដូចជា ការគិតតាមបែបតក្កៈ ការប្រើប្រាស់តក្កវិទ្យាក្នុងផ្នែកព័ត៌មានវិទ្យា ...។

ឯកសារយោង

១. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា << *ពីជគណិតអរូបី១* >> សាកលវិទ្យាល័យអង្គរខេមរា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១១ ។

២. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា << *គណិតវិទ្យាសម្រាប់កុំព្យូទ័រ* >> សាកលវិទ្យាល័យអង្គរខេមរា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១៣ ។

៣. គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយ៍នៃខេមរយានកម្មសិក្សា << *គណិតវិទ្យាៈពីជគណិត* >> ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រពិសោធ ឆ្នាំ១៩៧៣ ។

៤. ឈឹម ម៉េង << *ពីជគណិតទូទៅ* >> ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១០ ។

៥. ក្រុមអ្នកនិពន្ធ << *គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០ ភាគទី១* >> បោះពុម្ពផ្សាយដោយគ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយនៃក្រសួងអប់រំ យុវជននិងកីឡា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៩។

៦. Seymour Lipschutz, Ph.D., *Essential Computer Mathematics*, Schaum's Outline Series McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1982.

៧. Susanna S. EPP, *Discrete Mathematics With Applications*, Australia, Brooks/Cole Cengage Learning, Third Edition, 2004.

៨. https://www.whitman.edu/mathematics/higher_math_online/section02.01.html

៩. https://learnabout-electronics.org/Digital/dig23.php

១០. https://instrumentationtools.com/topic/boolean-algebraic-identities/

១១. https://studywell.com/as-maths/proof/disproof-by-counterexample/

១២. https://www.eduhk.hk/has/phys/de/de-ba.htm

១៣. https://slideplayer.com/slide/3822176/

១៤. https://www.geeksforgeeks.org/proposition-logic/

១៥. http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3/ch_logic.html