ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ និង រូបមន្តមួយចំនួន

(Study of Higher Derivative Theory of Functions And Some Formulas)

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

នាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២៣

មូលន័យសង្ខេប

ក្នុងអត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ យើងខ្ញុំសិក្សាអំពីទ្រឹស្តីដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ដូចជា ដេរីវេទី២ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍។ យើងមានការបញ្ចូលនិយមន័យនៃដេរីវេទី២ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ ទ្រឹស្តីបទ សម្រាយបញ្ជាក់ សម្គាល់ និង ឧទាហរណ៍មួយចំនួនផង ។ ជាពិសេស យើងខ្ញុំសិក្សាស្រាវជ្រាវបានរូបមន្តដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ចំនួន ៦១ ក្នុងនោះខ្ញុំរៀបរៀងបានរូបមន្តចំនួន ២៥ (រូបមន្ត (13), (19), (20), (21), (28), (30), (32), (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40), (41), (43), (45), (46), (47), (49), (53), (56), (58), (60), (61)) ដើម្បីចូលរួមចំណែកក្នុងការអភិវឌ្ឍចំណេះដឹងខាងផ្នែកទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យាលើវិស័យអប់រំ ។

ការសិក្សាទ្រឹស្ដីដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ និង រូបមន្តមួយចំនួន

(Study of Higher Derivative Theory of Functions And Some Formulas)

សេចក្ដីផ្ដើម

ពេលនេះ យើងខ្ញុំសូមលើកយកអត្ថបទស្រាវជ្រាវមួយមកបង្ហាញអ្នកអាន និង អ្នកសិក្សា គឺសិក្សាអំពីទ្រឹស្ដីដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ប៉ុណ្ណោះ ដែលលោកអ្នកបានធ្លាប់រៀននៅថ្នាក់ទី១១និងថ្នាក់ទី១២មកហើយ។ យើងបានសិក្សាដេរីវេទី១ ឬ ដេរីវេលំដាប់១រួចហើយក្នុងសៀវភៅ **ការសិក្សាទ្រឹស្ដីដេរីវេនៃអនុគមន៍** [១] (Study of Derivative Theory of Functions) (ភាគទី១) ហើយចំពោះអត្ថបទនេះវិញ យើងសិក្សាបន្តដូចជា ដេរីវេទី២ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ ។ ចំពោះគោលបំណងនៃអត្ថបទស្រាវជ្រាវគឺចង់បង្ហាញពីនិយមន័យនៃដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ ទ្រឹស្ដីបទ វិធីគណនា និង ការរៀបរៀងរូបមន្តមួយចំនួនដើម្បីជួយសម្រួលដល់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និង អ្នកស្រាវជ្រាវក្នុងការសិក្សាជំនាញគណិតវិទ្យា ហើយជាឯកសារជំនួយសម្រាប់រៀននិងបង្រៀនផងដែរ។ តើអ្វីទៅជាដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍? តើយើងត្រូវគណនាដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍តាមវិធីបែបណា? តើយើងអាចសិក្សាពង្រីកឬរៀបរៀងបានរូបមន្តដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍អ្វីខ្លះ?

១. ដេរីវេទី២

និយមន័យទី១ [២]

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេទី១ តាងដោយ y' ឬ $f'(x)$ ។ ដេរីវេទី២ តាងដោយ y'' ឬ $f''(x)$ គឺកំណត់ដោយនិយមន័យលីមីតនៃដេរីវេនៃដេរីវេទី១ គឺថា

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (1)$$ ។

សម្គាល់

១. គេអាចប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ សម្រាប់តាងដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ផងដែរ។

២. គេក៏អាចប្រើនិមិត្តសញ្ញាផ្សេងទៀតដែរ ចំពោះដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ $\ddot{y}, D^2 f$ ឬ $D_x^2 f$ ដែល D ជាការីដេរីវេ ឬ ការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

---

[១] http://rac.gov.kh/posts/1350

[២] https://activecalculus.org/single/sec-1-6-second-d.html

ទ្រឹស្តីបទទី១ [៣]

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេពីរដងត្រង់ x (ដេរីវេទី១ និង ដេរីវេទី២) ។ នោះគេបាន៖

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} \quad (2)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \quad (3)$$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

របៀបទី១

ដោយអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេពីរដងត្រង់ x នោះតាមនិយមន័យទី១ នាំឱ្យ

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

ដែល $f'(y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(y+h)-f(y)}{h}$ ។

នាំឱ្យ

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h+h)-f(x+h)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-2f(t)+f(t-h)}{h^2}$$ (ពិត ដោយតាង $t=x+h$) ។

របៀបទី២

អនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេពីរដងត្រង់ x និងលីមីតនៃអង្គខាងស្តាំមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ នោះយើងអនុវត្ត រូបមន្ត L'Hospital យើងបាន

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x))'}{(h^2)'}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2f'(x+2h)-2f'(x+h))'}{(2h)'}$$

[៣] https://en.wikipedia.org/wiki/Second_derivative

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4f''(x+2h)-2f''(x+h)}{2}$$

$$= \frac{4f''(x+2\cdot 0)-2f''(x+0)}{2} = f''(x) \text{ (ពិត) ។}$$

ចំពោះរូបមន្ត (3) យើងស្រាយបញ្ជាក់ស្រដៀងគ្នាដែរ តាមរូបមន្ត L'Hospital ។

ឧទាហរណ៍

ក. រកដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $f(x) = 5x^3 - 2x$ តាមលីមីតដោយប្រើពីររបៀប។

ខ. ទាញរក $f''(0)$ និង $f''(-2)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅះ

ក. រកដេរីវេទី២នៃ $f(x)$ ដោយប្រើពីររបៀប ។

របៀបទី១

យើងមាន $f(x) = 5x^3 - 2x$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

យើងបាន $f(x+h) = 5(x+h)^3 - 2(x+h)$

$$= 5(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 2x - 2h$$

$$= 5x^3 + 15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 - 2x - 2h \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(5x^3 + 15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 - 2x - 2h) - (5x^3 - 2x)}{h}$

$$= \frac{15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 - 2h}{h}$$

$$= 15x^2 + 15xh + 5h^2 - 2 \text{ ។}$$

តាមនិយមន័យលីមីតនៃដេរីវេទី១ យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (15x^2 + 15xh + 5h^2 - 2)$$

$$= 15x^2 + 15x(0) + 5(0)^2 - 2 = 15x^2 - 2 \text{ ។}$$

តាមនិយមន័យលីមីតនៃដេរីវេទី២ នាំឱ្យ

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(15(x+h)^2 - 2) - (15x^2 - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{15[(x+h)^2 - x^2]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{15[(x+h) - x][(x+h) + x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 15(2x+h) = 15(2x+0) = 30x$$ ។

ដូចនេះ $f''(x) = 30x$ ។

របៀបទី២

យើងមាន $f(x) = 5x^3 - 2x$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

យើងបាន

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = [5(x+2h)^3 - 2(x+2h)] - 2[5(x+h)^3 - 2(x+h)] + 5x^3 - 2x$$

$$= 5(x+2h)^3 - 10(x+h)^3 + 5x^3$$

$$= 5(x^3 + 6x^2h + 12xh^2 + 8h^3) - 10(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + 5x^3$$

$$= 60xh^2 + 40h^3 - 30xh^2 - 10h^3$$

$$= h^2(30x + 30h)$$ ។

តាមរូបមន្ត (2) នៃទ្រឹស្តីបទទី១ នាំឱ្យ

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2(30x + 30h)}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} (30x + 30h) = 30x + 30(0) = 30x$$ ។

ដូចនេះ $f''(x) = 30x$ ។

ខ. ទាញរក $f''(0)$ និង $f''(-2)$ ។

តាមសំណួរ ក. យើងមាន $f''(x) = 30x$ ។

នាំឱ្យ $f''(0) = 30(0) = 0$

និង $f''(-2) = 30(-2) = -60$ ។

និយមន័យទី២ [៤]

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេទី១ តាងដោយ $f'(x)$ ហើយ $f'(x)$ មានដេរីវេម្តងទៀត នោះដេរីវេនៃ $f'(x)$ នេះ ហៅថា ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ដែលតាងដោយ y'' ឬ $f''(x)$ គឺថា

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right) \quad (4)$$ ។

[៤] https://mathstat.slu.edu/~may/ExcelCalculus/sec-4-5-SecondDerivativeConcavity.html

ឧទាហរណ៍

គណនា $g'(x)$ និង $g''(x)$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $g(x)=(3x^3+2x^2)(4x^4-5x)$

ខ. $g(x)=\dfrac{3x^3+5}{4x^3-9}$

គ. $g(x)=x^n$ ដែល $x>0, n\in\mathbb{R}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

គណនា $g'(x)$ និង $g''(x)$ ។

ក. យើងមាន $g(x)=(3x^3+2x^2)(4x^4-5x)$ ។

តាមរូបមន្តងាយ រូបមន្តគ្រឹះ និង រូបមន្ត (4) នៃដេរីវេ យើងបាន

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= (3x^3+2x^2)'(4x^4-5x)+(3x^3+2x^2)(4x^4-5x)' \\
&= (9x^2+4x)(4x^4-5x)+(3x^3+2x^2)(16x^3-5) \\
&= 36x^6-45x^3+16x^5-20x^2+48x^6-15x^3+32x^5-10x^2 \\
&= 84x^6+48x^5-60x^3-30x^2
\end{aligned}
$$

និង

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= (g'(x))' = (84x^6)'+(48x^5)'-(60x^3)'-(30x^2)' \\
&= 504x^5+240x^4-180x^2-60x
\end{aligned}
$$
 ។

ខ. យើងមាន $g(x)=\dfrac{3x^3+5}{4x^3-9}$ ។

តាមរូបមន្តងាយ រូបមន្តគ្រឹះ និង រូបមន្ត (4) នៃដេរីវេ យើងបាន

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{(3x^3+5)'(4x^3-9)-(3x^3+5)(4x^3-9)'}{(4x^3-9)^2},\ 4x^3-9\neq 0 \\
&= \frac{9x^2(4x^3-9)-(3x^3+5)\cdot 12x^2}{(4x^3-9)^2},\ x^3\neq\frac{9}{4} \\
&= \frac{x^2(36x^3-81-36x^3-60)}{(4x^3-9)^2} = \frac{-141x^2}{(4x^3-9)^2},\ x^3\neq\frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

និង

$$
g''(x)=(g'(x))'=\frac{(-141x^2)'((4x^3-9)^2)-(-141x^2)((4x^3-9)^2)'}{(4x^3-9)^4},\ x^3\neq\frac{9}{4}
$$

$$= -141 \cdot \frac{2x \cdot (4x^3-9)^2 - x^2 \cdot 24x^2(4x^3-9)}{(4x^3-9)^4}$$

$$= -141 \cdot \frac{2x \cdot (4x^3-9) - x^2 \cdot 24x^2}{(4x^3-9)^3}$$

$$= -141 \cdot \frac{8x^4 - 18x - 24x^4}{(4x^3-9)^3} = \frac{2538x + 2256x^4}{(4x^3-9)^3}, \; x^3 \neq \frac{9}{4} \text{ ។}$$

គ. យើងមាន $g(x) = x^n = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$ ដែល $x > 0, n \in \mathbb{R}$ ។
តាមរូបមន្តងាយ រូបមន្តគ្រឹះ រូបមន្តបណ្តាក់ និង រូបមន្ត (4) នៃ
ដេរីវេ យើងបាន

$$g'(x) = (n \ln x)' e^{n \ln x} = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = n x^{n-1}$$

ឬ $(x^n)' = n x^{n-1} \quad (5)$

និង

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(g'(x)) = \frac{d}{dx}(n x^{n-1})$$

$$= n(n-1) x^{(n-1)-1} = n(n-1) x^{n-2} \text{ ។}$$

សម្គាល់

ក្នុងសៀវភៅ **ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍ ភាគទី១** [៥] យើងខ្ញុំបានសិក្សាពង្រីករូបមន្ត (5) ចំពោះ $n \in \mathbb{Q}$ ហើយក្នុងអត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ យើងខ្ញុំសិក្សាបន្តរូបមន្តនេះ ចំពោះ $n \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍

រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y លើទំនាក់ទំនង $2y^3 + 3x^3 = 54$ ដែល $y = y(x)$ ។
យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ។
យើងមានទំនាក់ទំនង $2y^3 + 3x^3 = 54$ ដែល $y = y(x)$ ។
យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះ យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(2y^3 + 3x^3) = \frac{d}{dx}(54)$$

សមមូល $\frac{d}{dx}(2y^3) + \frac{d}{dx}(3x^3) = 0$

[៥] http://rac.gov.kh/posts/1350

សមមូល $6y^2\dfrac{dy}{dx}+9x^2=0$ (រូបមន្តបណ្ដាក់) សមមូល $6y^2y' = -9x^2$

ដូចនេះ $y' = \dfrac{-9x^2}{6y^2} = -\dfrac{3x^2}{2y^2}$ ។

យើងមានពីររបៀបក្នុងការរក y'' ។

របៀបទី១

យើងប្រើសមីការ $6y^2y' = -9x^2$ ។

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(6y^2y') = \frac{d}{dx}(-9x^2)$$

សមមូល $\dfrac{d}{dx}(6y^2)\cdot y' + 6y^2\cdot\dfrac{d}{dx}(y') = -18x$

សមមូល $12y\,y'\cdot y' + 6y^2\cdot y'' = -18x$

សមមូល $6y^2\cdot y'' = -18x - 12y(y')^2$ ។

ដោយ $y' = -\dfrac{3x^2}{2y^2}$ នាំឱ្យ

$$y'' = \frac{-18x-12y(y')^2}{6y^2} = \frac{-3x-2y\left(-\dfrac{3x^2}{2y^2}\right)^2}{y^2}$$

$$= \frac{-3x-2y\left(\dfrac{9x^4}{4y^4}\right)}{y^2} = \frac{-3x(2y^3)-9x^4}{y^2(2y^3)}$$

$$= \frac{-6xy^3-9x^4}{2y^5} = \frac{-3x(2y^3+3x^3)}{2y^5}$$

$$= \frac{-3x(54)}{2y^5} = -\frac{81x}{y^5}$$ (ប្រើសម្មតិកម្ម)។

របៀបទី២

យើងប្រើសមីការ $y' = \dfrac{-9x^2}{6y^2} = -\dfrac{3x^2}{2y^2}$ ។

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(-\frac{3x^2}{2y^2})$$

សមមូល $y'' = -\frac{3}{2}\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{y^2}) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2)'\cdot(y^2)-(x^2)\cdot(y^2)'}{(y^2)^2}$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{(2x)y^2 - x^2(2yy')}{y^4} = -3\cdot\frac{(xy - x^2y')}{y^3}$$

$$= -3\cdot\frac{xy - x^2(-\frac{3x^2}{2y^2})}{y^3}$$ (ជំនួស $y' = -\frac{3x^2}{2y^2}$)

$$= \frac{-3(2xy^3 + 3x^4)}{2y^5} = \frac{-3x(2y^3 + 3x^3)}{2y^5}$$

$$= \frac{-3x(54)}{2y^5} = -\frac{81x}{y^5}$$ (ប្រើសម្មតិកម្ម)។

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេទី១ និង ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $g(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

គណនាដេរីវេទី១ និង ដេរីវេទី២នៃ g ។

យើងមាន $g(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ពីព្រោះ $|x| \geq 0$ នាំឱ្យ $1+|x| \neq 0$

ហើយ $(|x|)' = \frac{|x|}{x}$ ចំពោះ $x \neq 0$ [៦] ។

- បើ $x \neq 0$ នោះតាមរូបមន្តនៃដេរីវេ យើងបាន

$$g'(x) = \frac{(|x|)'\cdot(1+|x|) - |x|\cdot(1+|x|)'}{(1+|x|)^2}$$

$$= \frac{(\frac{|x|}{x})\cdot(1+|x|) - |x|\cdot(\frac{|x|}{x})}{(1+|x|)^2}$$

$$= \frac{|x|(1+|x|-|x|)}{x(1+|x|)^2} = \frac{|x|}{x(1+|x|)^2}$$ ។

---

[៦] http://rac.gov.kh/posts/1350

- បើ $x=0$ នាំឱ្យ

$$g'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{|h|}{1+|h|} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h(1-h)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{1-h} = \frac{-1}{1-0} = -1$$ និង

$$g'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{|h|}{1+|h|} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+h} = \frac{1}{1+0} = 1$$ ។

ដោយ $g'(0^-) \neq g'(0^+)$ នាំឱ្យ $g(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ។

ឥឡូវនេះ យើងបន្តគណនាដេរីវេទី២នៃ g ទៀត។

- បើ $x \neq 0$ នោះតាមរូបមន្តនៃដេរីវេ យើងបាន

$$g''(x) = \frac{(|x|)'x(1+|x|)^2 - |x|[x(1+|x|)^2]'}{[x(1+|x|)^2]^2}$$

$$= \frac{(\frac{|x|}{x})\, x(1+|x|)^2 - |x|[(x)'(1+|x|)^2 + x((1+|x|)^2)']}{[x(1+|x|)^2]^2}$$

$$= \frac{|x|(1+|x|)^2 - |x|[(1)(1+|x|)^2 + x(2(1+|x|)'(1+|x|))]}{x^2(1+|x|)^4}$$

$$= \frac{|x|(1+|x|)^2 - |x|(1+|x|)^2 - 2|x|x(\frac{|x|}{x})(1+|x|)}{x^2(1+|x|)^4}$$

$$= \frac{-2|x|^2(1+|x|)}{x^2(1+|x|)^4} = \frac{-2}{(1+|x|)^3}$$ ។

- បើ $x=0$ នាំឱ្យ $g(x)$ គ្មានដេរីវេទី១ត្រង់ $x=0$ ទេ (សម្រាយរួចហើយ) មានន័យថា $g'(0)$ មិនមានតម្លៃ ។ នាំឱ្យ $g(x)$ ក៏គ្មានដេរីវេទី២ត្រង់ $x=0$ ផងដែរ។

ជាសរុប យើងបាន $g'(x) = \dfrac{|x|}{x(1+|x|)^2}$, $g''(x) = \dfrac{-2}{(1+|x|)^3}$ ចំពោះ $x \neq 0$ ហើយ $g(x)$ គ្មានដេរីវេទី១និងដេរីវេទី២ត្រង់ $x=0$ ទេ ។

២. ដេរីវេបន្តបន្ទាប់

និយមន័យទី៣ [៧]

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងទៀត គេហៅ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ថា ដេរីវេទី១, ដេរីវេទី២, … , ដេរីវេទី n គេតាងរៀងគ្នាដោយ $y' = y^{(1)}$, $y'' = y^{(2)}$, $y''' = y^{(3)}$, $y^{(4)}$, … , $y^{(n)}$ ឬ $f'(x) = f^{(1)}(x),\ f''(x) = f^{(2)}(x),\ f'''(x) = f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x), \dots ,\ f^{(n)}(x)$ និង កំណត់ដោយ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x) \right)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(f(x) \right)\right) = \frac{d}{dx}\left(f'(x) \right)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(2)}(x) \right) = \frac{d}{dx}\left(f''(x) \right) \quad (6)$$

……………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x) \right) \quad (7)$$ ។

សម្គាល់

១. ការកំណត់សរសេរនិមិត្តសញ្ញារបស់ឡាហ្រ្កង់ (Lagrange) ចំពោះដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺបានបង្ហាញក្នុងនិយមន័យទី៣ ។

២. ការកំណត់សរសេរនិមិត្តសញ្ញារបស់លែបនីត (Leibniz) ចំពោះដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots , \frac{d^ny}{dx^n}$ ឬ $\frac{d}{dx}f(x), \frac{d^2}{dx^2}f(x), \frac{d^3}{dx^3}f(x), \dots , \frac{d^n}{dx^n}f(x)$ ។

៣. ការកំណត់សរសេរនិមិត្តសញ្ញារបស់អឺលែ (Euler) ចំពោះដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ $Dy, D^2y, D^3y, \dots , D^ny$ ឬ $D_xy, D_x^2y, D_x^3y, \dots , D_x^ny$
ដែល D ជាការីដេរីវេ ឬ ការីឌីផេរ៉ង់ស្យល ។

៤. ការកំណត់សរសេរនិមិត្តសញ្ញារបស់ញូតុន)Newton) ចំពោះដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \overset{4}{\dot{y}}, \dots , \overset{n}{\dot{y}}$ ។

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេទី៥នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 250$

ខ. $g(x) = 4x^8 - 8x + 5e^x - 7\ln x$ ។

---

[៧] https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. គណនាដេរីវេទី៥នៃ $f(x)$ ។

យើងមាន $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 250$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបានដេរីវេជាបន្តបន្ទាប់គឺ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(x) \big) = (4x^5)' - (5x^4)' + (3x^3)' - (250)'$$

$$= 20x^4 - 20x^3 + 9x^2$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\big(f'(x) \big) = (20x^4)' - (20x^3)' + (9x^2)'$$

$$= 80x^3 - 60x^2 + 18x$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\big(f''(x) \big) = (80x^3)' - (60x^2)' + (18x)'$$

$$= 240x^2 - 120x + 18$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\Big(f^{(3)}(x) \Big) = (240x^2)' - (120x)' + (18)'$$

$$= 480x - 120 \text{ និង}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}\Big(f^{(4)}(x) \Big) = (480x)' - (120)' = 480 \text{ ។}$$

ដូចនេះ ដេរីវេទី៥នៃ $f(x)$ គឺ $f^{(5)}(x) = 480$ ។

ខ. គណនាដេរីវេទី៥នៃ $g(x)$ ។

យើងមាន $g(x) = 4x^8 - 8x + 5e^x - 7\ln x$ កំណត់បានចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបានដេរីវេជាបន្តបន្ទាប់គឺ

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\big(g(x) \big) = (4x^8)' - (8x)' + (5e^x)' - (7\ln x)'$$

$$= 32x^7 - 8 + 5e^x - \frac{7}{x}$$

$$= 32x^7 - 8 + 5e^x - 7x^{-1}$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\big(g'(x) \big) = (32x^7)' - (8)' + (5e^x)' - (7x^{-1})'$$

$$= 224x^6 + 5e^x + 7x^{-2}$$

$$g^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\big(g''(x) \big) = (224x^6)' + (5e^x)' + (7x^{-2})'$$

$$= 1344x^5 + 5e^x - 14x^{-3}$$

$$g^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\Big(g^{(3)}(x) \Big) = (1344x^5)' + (5e^x)' - (14x^{-3})'$$
$$= 6720x^4 + 5e^x + 42x^{-4} \text{ និង}$$
$$g^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}\Big(g^{(4)}(x) \Big) = (6720x^4)' + (5e^x)' + (42x^{-4})'$$
$$= 26880x^3 + 5e^x - 168x^{-5} \text{ ។}$$

ដូចនេះ ដេរីវេទី៥នៃ $g(x)$ គឺ $g^{(5)}(x) = 26880x^3 + 5e^x - 168x^{-5}$ ។

៣. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងសរសេរអថេរ x និង y ជាអនុគមន៍នៃអថេរទីបី t ដោយគូនៃអនុគមន៍ $x = x(t)$, $y = y(t)$ ។ អនុគមន៍បែបនេះ ហៅថា អនុគមន៍ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ឬ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ នៃខ្សែកោងប្លង់ និង អថេរ t ហៅថា ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ [៨]

គេឱ្យខ្សែកោងប្លង់កំណត់ដោយសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $x = x(t)$ និង $y = y(t)$ ។ ឧបមាថា $x'(t)$ និង $y'(t)$ មាន ហើយសន្មតថា $x'(t) \neq 0$ ។ នោះគេបានដេរីវេ $\frac{dy}{dx}$ កំណត់ដោយ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (8) \text{ ។}$$

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

យើងសន្មតថា ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ t អាចបំបាត់បាន ដែលផ្តល់នូវអនុគមន៍មានដេរីវេ (មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល) $y = F(x)$ ។

នាំឱ្យ $y(t) = F(x(t))$ ។

ការធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ ដោយប្រើរូបមន្តបណ្តាក់ផ្តល់ឱ្យ $y'(t) = F'(x(t)) \cdot x'(t)$ ។

នាំឱ្យ $\frac{dy}{dx} = F'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ (ពិត) ។

ពីរូបមន្ត (8) យើងធ្វើដេរីវេជាបន្តបន្ទាប់ នោះយើងបានរូបមន្តដេរីវេប៉ារ៉ាម៉ែត្រលំដាប់ខ្ពស់ខាងក្រោម៖

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \quad (9)$$

[៨] https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_210_Calculus_I_(Seeburger)/04%3A_Applications_of_Derivatives/4.08%3A_Derivatives_of_Parametric_Equations

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}} \quad (10)$$

……………………………………………………………

……………………………………………………………

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{\frac{dx}{dt}} \quad (11)$$

ទ្រឹស្តីបទទី៣

គេឱ្យខ្សែកោងប្លង់កំណត់ដោយសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $x=x(t)$ និង $y=y(t)$ ។ ឧបមាថា $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$ និង $y'(t)$, $y''(t)$, $y'''(t)$ មាន ហើយសន្មតថា $x'(t)\neq 0$ ។ នោះគេបានដេរីវេ $\frac{d^2y}{dx^2}$ និង $\frac{d^3y}{dx^3}$ កំណត់ដោយ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{(\frac{dx}{dt})^3}=\frac{x'(t)\cdot y''(t)-y'(t)\cdot x''(t)}{(x'(t))^3} \quad (12)$$

និង

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(\frac{dx}{dt})^2\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}(\frac{d^2x}{dt^2})^2}{(\frac{dx}{dt})^5}$$

$$=\frac{(x'(t))^2y'''(t)-x'(t)y'(t)x'''(t)-3x'(t)x''(t)y''(t)+3y'(t)(x''(t))^2}{(x'(t))^5} \quad (13) \text{ ។}$$

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

ដោយ $x'(t), x''(t), x'''(t)$ និង $y'(t), y''(t), y'''(t)$ មាន ហើយ $x'(t)\neq 0$ នោះយើងបាន

$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$ (តាមរូបមន្ត (8))

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{x'(t)} = \frac{\frac{(y'(t))' \cdot x'(t) - y'(t)\cdot(x'(t))'}{(x'(t))^2}}{x'(t)}$$

$$= \frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{(x'(t))^3}$$ (ពិត)

និង

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{(x'(t))^3}\right)}{x'(t)}$$

$$= \frac{\frac{(x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))'(x'(t))^3 - (x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))((x'(t))^3)'}{[(x'(t))^3]^2}}{x'(t)}$$

$$= \frac{(x''(t)y''(t) + x'(t)y'''(t) - y''(t)x''(t) - y'(t)x'''(t))(x'(t))^3 - (x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))(3x''(t)(x'(t))^2)}{(x'(t))^7}$$

$$= \frac{(x''(t)y''(t) + x'(t)y'''(t) - y''(t)x''(t) - y'(t)x'''(t))x'(t) - 3(x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))x''(t)}{(x'(t))^5}$$

$$= \frac{x'(t)x''(t)y''(t) + (x'(t))^2y'''(t) - x'(t)y''(t)x''(t) - x'(t)y'(t)x'''(t) - 3x'(t)x''(t)y''(t) + 3y'(t)(x''(t))^2}{(x'(t))^5}$$

$$= \frac{(x'(t))^2y'''(t) - x'(t)y'(t)x'''(t) - 3x'(t)x''(t)y''(t) + 3y'(t)(x''(t))^2}{(x'(t))^5}$$ (ពិត) ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (13) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី១៧ ខែឧសភា ឆ្នាំ២០២៣ ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យខ្សែកោងប៉ារ៉ាម៉ែត្រកំណត់ដោយសមីការ

$x = e^t - 1$ និង $y = \ln t$ ។

រក $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ និង $\frac{d^3y}{dx^3}$ តាមពីររបៀប ។

យើងមានដំណោះស្រាយពីររបៀបដូចតទៅ៖

រក $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ និង $\frac{d^3y}{dx^3}$ ។

របៀបទី១

យើងមាន $x = e^t - 1$ និង $y = \ln t$ ។

នាំឱ្យ $x'(t) = e^t$, $x''(t) = e^t$, $x'''(t) = e^t$,

$y'(t) = (\ln t)' = \frac{1}{t}$, $y''(t) = -\frac{1}{t^2}$

និង

$$y'''(t) = -[-\frac{(t^2)'}{(t^2)^2}] = \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3} \text{ ។}$$

តាមរូបមន្ត (8), (12) និង (13) យើងបាន៖

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{e^t} = \frac{1}{t\,e^t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{(x'(t))^3}$$

$$= \frac{(\mathrm{e}^t)\cdot(-\frac{1}{t^2}) - (\frac{1}{t})\cdot(\mathrm{e}^t)}{(\mathrm{e}^t)^3}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^t(-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t})}{\mathrm{e}^{3t}} = -\frac{1+t}{t^2\,e^{2t}}$$

និង

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(x'(t))^2 y'''(t) - x'(t)y'(t)x'''(t) - 3x'(t)x''(t)y''(t) + 3y'(t)(x''(t))^2}{(x'(t))^5}$$

$$= \frac{(\mathrm{e}^t)^2(\frac{2}{t^3}) - (\mathrm{e}^t)(\frac{1}{t})(\mathrm{e}^t) - 3(\mathrm{e}^t)(\mathrm{e}^t)(-\frac{1}{t^2}) + 3(\frac{1}{t})(\mathrm{e}^t)^2}{(\mathrm{e}^t)^5}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2t}(\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{3}{t})}{\mathrm{e}^{5t}} = \frac{2 + 3t + 2t^2}{t^3\,\mathrm{e}^{3t}} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t\,e^t}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+t}{t^2\,e^{2t}}$ និង $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2+3t+2t^2}{t^3\,\mathrm{e}^{3t}}$ ។

របៀបទី២

រក $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ និង $\frac{d^3y}{dx^3}$ ។

យើងមាន $x=e^t-1$ និង $y=\ln t$ ។

នាំឱ្យ $\frac{dx}{dt}=e^t$ និង $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$ ។

តាមរូបមន្ត (8), (9) និង (10) យើងបាន៖

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t}}{e^t}=\frac{1}{t\,e^t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t\,e^t}\right)}{e^t}$$

$$=\frac{-\frac{(t\,e^t)'}{(t\,e^t)^2}}{e^t}=-\frac{(t)'e^t+t\,(e^t)'}{e^t(t\,e^t)^2}$$

$$=-\frac{1e^t+t\,e^t}{e^t t^2\,e^{2t}}=-\frac{1+t}{t^2\,e^{2t}}$$

និង

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{1+t}{t^2\,e^{2t}}\right)}{e^t}$$

$$=\frac{-\frac{(1+t)'(t^2e^{2t})-(1+t)(t^2e^{2t})'}{(t^2e^{2t})^2}}{e^t}$$

$$=-\frac{(1)t^2e^{2t}-(1+t)(2t\,e^{2t}+2t^2e^{2t})}{e^t\,(t^2e^{2t})^2}$$

$$= \frac{t\,e^{2t}(-t+(1+t)(2+2t))}{e^t\,t^4 e^{4t}}$$

$$= \frac{-t+2+2t+2t+2t^2}{t^3 e^{3t}} = \frac{2+3t+2t^2}{t^3 e^{3t}} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t\,e^t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t}{t^2\,e^{2t}}$ និង $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2+3t+2t^2}{t^3\,\mathrm{e}^{3t}}$ ។

៤. ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍មួយចំនួន

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍មួយចំនួនដូចជា អនុគមន៍ស្វ័យគុណ អនុគមន៍សនិទាន អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អនុគមន៍លោការីត ។

៤.១ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x) = (ax+b)^k$

ឥឡូវនេះ យើងគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍

$f(x) = (ax+b)^k$ ដែល $a \neq 0, k \neq 0$ ដូចតទៅ៖

តាមរូបមន្តបណ្តាក់ រូបមន្តងាយ រូបមន្តគ្រឹះ និង រូបមន្ត (5) នៃដេរីវេ យើងបានដេរីវេជាបន្តបន្ទាប់គឺ

$$f'(x) = [(ax+b)^k]' = k(ax+b)'(ax+b)^{k-1}$$

$$= k\,a^1(ax+b)^{k-1}$$

$$f''(x) = [k\,a^1(ax+b)^{k-1}]'$$

$$= ka^1(k-1)(ax+b)'(ax+b)^{k-2}$$

$$= k(k-1)a^2(ax+b)^{k-2}$$

....

....

ឧបមាថា វាពិតដល់ $n-1$ គឺ

$$f^{(n-1)}(x) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-2))\,a^{n-1}(ax+b)^{k-(n-1)}$$

នោះយើងនឹងស្រាយថា វាពិតដល់ n ។

តាមកំណើន យើងមាន $f^{(n-1)}(x) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-2))\,a^{n-1}(ax+b)^{k-(n-1)}$ ។

យើងបាន

$$f^{(n)}(x) = [\,f^{(n-1)}(x)]'$$

$$= [k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-2))\,a^{n-1}(ax+b)^{k-(n-1)}]'$$

$$= k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-2))(k-(n-1))\,a^{n-1}(ax+b)'(ax+b)^{k-(n-1)-1}$$

$$= k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-1))\,a^n(ax+b)^{k-n}$$

មានន័យថា វាពិតដល់ n ។

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃ $f(x)=(ax+b)^k$ គឺ

$f^{(n)}(x)=k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-1))a^n(ax+b)^{k-n}$ (14)

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $g_1(x)=x^n$ ដែល $n\in\mathbb{N}$

ខ. $g_2(x)=(ax+b)^n$ ដែល $n\in\mathbb{N},\ a\neq 0$

គ. $g_3(x)=\dfrac{1}{x}$

ឃ. $g_4(x)=\dfrac{1}{ax+b}$ ដែល $a\neq 0$

ង. $g_5(x)=\dfrac{1}{x^2}$

ច. $g_6(x)=\dfrac{1}{(ax+b)^2}$ ដែល $a\neq 0$

ឆ. $g_7(x)=\dfrac{1}{x^p}$ ដែល $p\in\mathbb{N}$

ជ. $g_8(x)=\dfrac{1}{(ax+b)^p}$ ដែល $p\in\mathbb{N},\ a\neq 0$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. រកដេរីវេទី n នៃ $g_1(x)$ ។

យើងមាន $g_1(x)=x^n$ ។

ដោយយក $a=1,\ b=0$ និង $k=n$ ជំនួសចូលរូបមន្ត (14) នោះយើងបានដេរីវេទី n នៃ $g_1(x)=x^n$ គឺ

$$g_1^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))1^n(1x+0)^{n-n}$$
$$=n!\,x^0=n!\quad(15)$$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។

ខ. រកដេរីវេទី n នៃ $g_2(x)$ ។

យើងមាន $g_2(x)=(ax+b)^n$ ។

ដោយយក $k=n$ ជំនួសចូលរូបមន្ត (14) នោះយើងបានដេរីវេទី n នៃ $g_2(x)=(ax+b)^n$ គឺ

$$g_2^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))a^n(ax+b)^{n-n}$$
$$=n!a^n(ax+b)^0=n!\,a^n\quad(16)$$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។

គ. រកដេរីវេទី n នៃ $g_3(x)$ ។

យើងមាន $g_3(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ កំណត់បានចំពោះ $x\neq 0$ ។

ដោយយក $a=1,\ b=0$ និង $k=-1$ ជំនួសចូលរូបមន្ត (14) នោះយើងបានដេរីវេទី n នៃ

$g_3(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ គឺ

$$g_3^{(n)}(x)=(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-(n-1))1^n(1x+0)^{-1-n}$$

$$=(-1)^n n!\,x^{-n-1}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad (17)$$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N},\ x\neq 0$ ។

ឃ. រកដេរីវេទី n នៃ $g_4(x)$ ។

យើងមាន $g_4(x)=\dfrac{1}{ax+b}=(ax+b)^{-1}$ កំណត់បានចំពោះ $x\neq -\dfrac{b}{a}$ ។

ដោយយក $k=-1$ ជំនួសចូលរូបមន្ត (14) នោះយើងបានដេរីវេទី n នៃ $g_4(x)=\dfrac{1}{ax+b}=(ax+b)^{-1}$ គឺ

$$g_4^{(n)}(x)=(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-(n-1))\,a^n(ax+b)^{-1-n}$$

$$=(-1)^n n!\,a^n(ax+b)^{-n-1}=\frac{(-1)^n n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}} \quad (18)$$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N},\ x\neq -\dfrac{b}{a}$ ។

ង. រកដេរីវេទី n នៃ $g_5(x)$ ។

យើងមាន $g_5(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$ កំណត់បានចំពោះ $x\neq 0$ ។

ដោយយក $a=1,\ b=0$ និង $k=-2$ ជំនួសចូលរូបមន្ត (14) នោះយើងបានដេរីវេទី n នៃ

$g_5(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$ គឺ

$$g_5^{(n)}(x)=(-2)(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-(n-1))\,1^n(1x+0)^{-2-n}$$

$$=(-1)^n(n+1)!\,x^{-n-2}=\frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}} \quad (19)$$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N},\ x\neq 0$ ។

ច. រកដេរីវេទី n នៃ $g_6(x)$ ។

យើងមាន $g_6(x)=\dfrac{1}{(ax+b)^2}=(ax+b)^{-2}$ កំណត់បានចំពោះ $x\neq -\dfrac{b}{a}$ ។

ដោយយក $k=-2$ ជំនួសចូលរូបមន្ត (14) នោះយើងបានដេរីវេទី n នៃ $g_6(x)=\dfrac{1}{(ax+b)^2}=(ax+b)^{-2}$ គឺ

$$\begin{aligned} g_6^{(n)}(x) &= (-2)(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-(n-1))\,a^n\,(ax+b)^{-2-n} \\ &= (-1)^n (n+1)!\,a^n (ax+b)^{-n-2} \\ &= \frac{(-1)^n (n+1)!\,a^n}{(ax+b)^{n+2}} \qquad (20) \end{aligned}$$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N},\ x\neq -\dfrac{b}{a}$ ។

ឆ. រកដេរីវេទី n នៃ $g_7(x)$ ។

យើងមាន $g_7(x)=\dfrac{1}{x^p}=x^{-p}$ កំណត់បានចំពោះ $x\neq 0$ ។

ដោយយក $a=1,\ b=0$ និង $k=-p$ ជំនួសចូលរូបមន្ត (14) នោះយើងបានដេរីវេទី n នៃ

$g_7(x)=\dfrac{1}{x^p}=x^{-p}$ គឺ

$$\begin{aligned} g_7^{(n)}(x) &= (-p)(-p-1)(-p-2)\cdots(-p-(n-1))1^n\,(1x+0)^{-p-n} \\ &= \frac{(-1)^n p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}{x^{p+n}} \\ &= \frac{(-1)^n (n+p-1)!}{(p-1)!\,x^{p+n}} \qquad (21) \end{aligned}$$

ចំពោះ $n,\ p\in\mathbb{N},\ x\neq 0$ ។

ជ. រកដេរីវេទី n នៃ $g_8(x)$ ។

យើងមាន $g_8(x)=\dfrac{1}{(ax+b)^p}=(ax+b)^{-p}$ កំណត់បានចំពោះ $x\neq -\dfrac{b}{a}$ ។

ដោយយក $k=-p$ ជំនួសចូលរូបមន្ត (14) នោះយើងបានដេរីវេទី n នៃ $g_8(x)=\dfrac{1}{(ax+b)^p}=(ax+b)^{-p}$ គឺ

$$\begin{aligned} g_8^{(n)}(x) &= (-p)(-p-1)(-p-2)\cdots(-p-(n-1))\ a^n\,(ax+b)^{-p-n} \\ &= \frac{(-1)^n p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)\ a^n}{(ax+b)^{p+n}} \\ &= \frac{(-1)^n (p+n-1)!\,a^n}{(p-1)!\,(ax+b)^{p+n}} \qquad (22) \end{aligned}$$

ចំពោះ $n,\ p\in\mathbb{N},\ x\neq -\dfrac{b}{a}$ ។

៤.២ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $h(x)=e^{ax+b}$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $h(x)=e^{ax+b}$ ដែល $a\neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ e^{x} ដូចតទៅ៖

យើងមាន $h(x)=e^{ax+b}$ កំណត់បានចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

តាមរូបមន្តបណ្តាក់ រូបមន្តងាយ និង រូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបានដេរីវេជាបន្តបន្ទាប់គឺ

$$h'(x)=(e^{ax+b})'=(ax+b)'\,e^{ax+b}$$
$$=a^{1}e^{ax+b}$$
$$h''(x)=(a^{1}e^{ax+b})'=a^{1}(ax+b)'\,e^{ax+b}$$
$$=a^{1}a\,e^{ax+b}=a^{2}e^{ax+b}$$

....

....

ឧបមាថា វាពិតដល់ $n-1$ គឺ

$$h^{(n-1)}(x)=a^{n-1}e^{ax+b}$$

នោះយើងនឹងស្រាយថា វាពិតដល់ n ។

តាមកំណើន យើងមាន

$h^{(n-1)}(x)=a^{n-1}e^{ax+b}$ ។

យើងបាន

$$h^{(n)}(x)=[h^{(n-1)}(x)]'=[a^{n-1}e^{ax+b}]'$$
$$=a^{n-1}(ax+b)'\,e^{ax+b}$$
$$=a^{n-1}a\,e^{ax+b}=a^{n}e^{ax+b}$$

មានន័យថា វាពិតដល់ n ។

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃ $h(x)=e^{ax+b}$ គឺ $h^{(n)}(x)=a^{n}e^{ax+b}$ $\quad(23)$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។

ដោយយក $a=1$ និង $b=0$ នោះពីរូបមន្ត (23) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ e^{x} គឺ

$(e^{x})^{(n)}=1^{n}e^{1x+0}=e^{x}$ $\ (24)$ ។

៤.៣ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $u(x)=\ln(ax+b)$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $u(x)=\ln(ax+b)$ ដែល $a\neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $\ln x$ ដូចតទៅ៖

យើងមាន $u(x)=\ln(ax+b)$ កំណត់បានចំពោះ $ax+b>0$ ។

តាមរូបមន្តបណ្តាក់ រូបមន្តងាយ និង រូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបានដេរីវេជាបន្តបន្ទាប់គឺ

$$u'(x) = (\ln(ax+b))' = (ax+b)' \cdot \frac{1}{ax+b} = \frac{(-1)^0\, 0!\, a}{ax+b}$$

$$u''(x) = (\frac{a}{ax+b})' = [a(ax+b)^{-1}]' = -a(ax+b)'\,(ax+b)^{-2}$$

$$= -a^2\, 1!\,(ax+b)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!\, a^2}{(ax+b)^2}$$

……………………………………………………………………….

……………………………………………………………………….

ឧបមាថា វាពិតដល់ $n-1$ គឺ

$$u^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!\, a^{n-1}}{(ax+b)^{n-1}}$$

នោះយើងនឹងស្រាយថា វាពិតដល់ n ។

តាមកំណើន យើងមាន

$$u^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!\, a^{n-1}}{(ax+b)^{n-1}}$$

$$= (-1)^{n-2}(n-2)!\, a^{n-1}(ax+b)^{-n+1}$$ ។

យើងបាន

$$u^{(n)}(x) = [u^{(n-1)}(x)]'$$

$$= [(-1)^{n-2}(n-2)!\, a^{n-1}(ax+b)^{-n+1}]'$$

$$= (-1)^{n-2}(n-2)!\, a^{n-1}(-\mathrm{n}+1)(ax+b)'\,(ax+b)^{-n+1-1}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\, a^n\,(ax+b)^{-n}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$$

មានន័យថា វាពិតដល់ n ។

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃ $u(x) = \ln(ax+b)$ គឺ $u^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$ $\quad (25)$

ចំពោះ $n \in \mathbb{N}, ax+b > 0$ ។

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (25) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $\ln x$ គឺ

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, 1^n}{(1x+0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \quad (26)$$

ចំពោះ $n \in \mathbb{N}, x > 0$ ។

៥. ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ផលគុណ

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ផលគុណមួយចំនួន ដែលផ្សំគ្នារវាងអនុគមន៍លីនេអ៊ែ និង អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល, អនុគមន៍ស្វ័យគុណ និង អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល, អនុគមន៍សនិទាន និង អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាដើម ។

៥.១ រូបមន្តដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = u \cdot v$

បើគេមានអនុគមន៍ $y = u \cdot v$ ដែល $u = u(x)$ និង $v = v(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទី១, ដេរីវេទី២, $\dots$, ដេរីវេទី n នោះគេបានអនុគមន៍ y មានដេរីវេទី១, ដេរីវេទី២, $\dots$, ដេរីវេទី n ដូចតទៅ៖

$$y^{(1)} = y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y^{(2)} = y'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$$

$$y^{(3)} = y''' = u''' \cdot v + 3u'' \cdot v' + 3u' \cdot v'' + u \cdot v'''$$

$$y^{(4)} = u^{(4)} v + 4u^{(3)} v^{(1)} + 6u^{(2)} v^{(2)} + 4u^{(1)} v^{(3)} + u v^{(4)}$$

$$= C(4,0)u^{(4)} v + C(4,1)u^{(3)} v^{(1)} + C(4,2)u^{(2)} v^{(2)} + C(4,3)u^{(1)} v^{(3)} + C(4,4)u v^{(4)}$$

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

$$y^{(n)} = (u \cdot v)^{(n)} = C(n,0)u^{(n)} v + C(n,1)u^{(n-1)} v^{(1)} + C(n,2)u^{(n-2)} v^{(2)} + \dots + C(n,n-1)u^{(1)} v^{(n-1)} + C(n,n)u v^{(n)} \quad (27)$$

(រូបមន្តលែបនីត)[៩]

ដែល $C(n, k) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $n \ge k$, $n, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ។

៥.២ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = xe^{ax+b}$

ឥឡូវនេះ យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y = xe^{ax+b}$ ដែល $a \neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ xe^x ។ ដោយប្រើរូបមន្ត (23) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y = xe^{ax+b}$ $(a \neq 0)$ គឺ

$$y^{(n)} = a^{n-1}e^{ax+b}[C(n,n-1) + C(n,n)ax] = a^{n-1}e^{ax+b}(n + ax) \quad (28) ។$$

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (28) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ xe^x គឺ

$$(xe^x)^{(n)} = (xe^{1\cdot x+0})^{(n)} = 1^{n-1}e^{1\cdot x+0}(n + 1\cdot x) = e^x(n + x) \quad (29) ។$$

សម្គាល់

រូបមន្ត (28) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី១ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំ (https://www.facebook.com/profile.php?id=100008785389245&mibextid=LQQJ4d) នៅថ្ងៃទី១៥ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ ។

---

[៩] https://testbook.com/maths/leibnitz-theorem

៥.៣ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = x^2 e^{ax+b}$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y = x^2 e^{ax+b}$ ដែល $a \neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $x^2 e^x$ ។
ដោយប្រើរូបមន្ត (23) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y = x^2 e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$ គឺ

$$y^{(n)} = a^{n-2}e^{ax+b}[2C(n,n-2)+2axC(n,n-1)+a^2x^2C(n,n)]$$
$$= a^{n-2}e^{ax+b}[n(n-1)+2nax+a^2x^2] \quad (30) \text{ ។}$$

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (30) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $x^2 e^x$ គឺ

$$(x^2 e^x)^{(n)} = (x^2 e^{1\cdot x+0})^{(n)}$$
$$= 1^{n-2}e^{1\cdot x+0}[n(n-1)+2n\cdot 1x+1^2x^2]$$
$$= e^x[n(n-1)+2nx+x^2] \quad (31) \text{ ។}$$

សម្គាល់

រូបមន្ត (30) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី៧ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំនៅថ្ងៃទី១៥ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.៤ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = x^3 e^{ax+b}$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y = x^3 e^{ax+b}$ ដែល $a \neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $x^3 e^x$ ។
ដោយប្រើរូបមន្ត (23) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y = x^3 e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$ គឺ

$$y^{(n)} = a^{n-3}e^{ax+b}[6C(n,n-3)+6axC(n,n-2)+3a^2x^2C(n,n-1)+a^3x^3C(n,n)]$$
$$= a^{n-3}e^{ax+b}[n(n-1)(n-2)+3n(n-1)ax+3na^2x^2+a^3x^3] \quad (32) \text{ ។}$$

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (32) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $x^3 e^x$ គឺ

$$(x^3 e^x)^{(n)} = (x^3 e^{1\cdot x+0})^{(n)}$$
$$= 1^{n-3}e^{1x+0}[n(n-1)(n-2)+3n(n-1)(1)x+3n1^2x^2+1^3x^3]$$
$$= e^x[n(n-1)(n-2)+3n(n-1)x+3nx^2+x^3] \quad (33) \text{ ។}$$

សម្គាល់

រូបមន្ត (32) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី៨ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំនៅថ្ងៃទី២១ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.៥ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{1}{x}e^{ax+b}$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y = \dfrac{1}{x}e^{ax+b}$ ដែល $a \neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $\dfrac{e^x}{x}$ ។

ដោយប្រើរូបមន្ត (17), (23) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y=\frac{1}{x}e^{ax+b}$ $(a\neq 0)$ គឺ

$$y^{(n)}=e^{ax+b}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}(n-i)!a^{i}}{x^{n-i+1}}C(n,i)\quad (34)$$

ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N},\ x\neq 0$ ។

ដោយយក $a=1$ និង $b=0$ នោះពីរូបមន្ត (34) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $\frac{e^{x}}{x}$ គឺ

$$\begin{aligned}(\frac{e^{x}}{x})^{(n)}&=(\frac{1}{x}e^{1x+0})^{(n)}\\&=e^{1x+0}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}(n-i)!\cdot 1^{i}}{x^{n-i+1}}C(n,i)\\&=e^{x}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}(n-i)!}{x^{n-i+1}}C(n,i)\quad (35)\end{aligned}$$

ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N},\ x\neq 0$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (34) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី១៤ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំ នៅថ្ងៃទី២១ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.៦ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x^{2}}e^{ax+b}$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y=\frac{1}{x^{2}}e^{ax+b}$ ដែល $a\neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $\frac{e^{x}}{x^{2}}$ ។

ដោយប្រើរូបមន្ត (19), (23) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y=\frac{1}{x^{2}}e^{ax+b}$ $(a\neq 0)$ គឺ

$$y^{(n)}=e^{ax+b}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}(n-i+1)!a^{i}}{x^{n-i+2}}C(n,i)\quad (36)$$

ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N},\ x\neq 0$ ។

ដោយយក $a=1$ និង $b=0$ នោះពីរូបមន្ត (36) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $\frac{e^{x}}{x^{2}}$ គឺ

$$(\frac{e^{x}}{x^{2}})^{(n)}=(\frac{1}{x^{2}}e^{1x+0})^{(n)}=e^{1x+0}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}(n-i+1)!\cdot 1^{i}}{x^{n-i+2}}C(n,i)$$

$$= e^x \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}(n-i+1)!}{x^{n-i+2}} C(n,i) \quad (37)$$

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N},\ x \neq 0$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (36) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី១៥ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំ នៅថ្ងៃទី២៨ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.៧ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = \frac{1}{x^3} e^{ax+b}$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y = \frac{1}{x^3} e^{ax+b}$ ដែល $a \neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $\frac{e^x}{x^3}$ ។

យើងមានរូបមន្ត (21) គឺ $\left(\frac{1}{x^p}\right)^{(n)} = (x^{-p})^{(n)} = \frac{(-1)^n (p+n-1)!}{(p-1)!\, x^{p+n}}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ ។

យើងយក $p = 3$ ជំនួសចូលក្នុងរូបមន្ត (21) នោះយើងបាន

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^{(n)} = (x^{-3})^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+2)!}{(3-1)!\, x^{n+3}} = \frac{(-1)^n (n+2)!}{2\, x^{n+3}} \quad (38)$$

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N},\ x \neq 0$ ។

ដោយប្រើរូបមន្ត (38), (23) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y = \frac{1}{x^3} e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$ គឺ

$$y^{(n)} = e^{ax+b} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}(n-i+2)!\, a^i}{2x^{n-i+3}} C(n,i) \quad (39)$$

ចំពោះ $n \in \mathbb{N},\ x \neq 0$ ។

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (39) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $\frac{e^x}{x^3}$ គឺ

$$\left(\frac{e^x}{x^3}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x^3} e^{1x+0}\right)^{(n)} = e^{1x+0} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}(n-i+2)! \cdot 1^i}{2x^{n-i+3}} C(n,i)$$

$$= e^x \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}(n-i+2)!}{2x^{n-i+3}} C(n,i) \quad (40)$$

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N},\ x \neq 0$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (39) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី២១ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំ នៅថ្ងៃទី២៨ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.៨ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = e^{ax+b}\ln x$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y = e^{ax+b}\ln x$ ដែល $a \neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $e^{x}\ln x$ ។ ដោយប្រើរូបមន្ត (26), (23) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y = e^{ax+b}\ln x\ (a \neq 0,\ x > 0)$ គឺ

$$y^{(\mathrm{n})} = e^{ax+b}[a^{n}\ln x + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-i-1}(n-i-1)!a^{i}}{x^{n-i}}C(n,i)] \quad (41)$$

ចំពោះ $n \in \mathbb{N},\ x > 0$ ។

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (41) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $e^{x}\ln x$ គឺ

$$\begin{aligned}(e^{x}\ln x)^{(n)} &= (e^{1x+0}\ln x)^{(n)}\\ &= e^{1x+0}[1^{n}\ln x + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-i-1}(n-i-1)!\,1^{i}}{x^{n-i}}C(n,i)]\\ &= e^{x}[\ln x + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-i-1}(n-i-1)!}{x^{n-i}}C(n,i)] \quad (42)\end{aligned}$$

ចំពោះ $n \in \mathbb{N},\ x > 0$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (41) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី២៩ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំ នៅថ្ងៃទី៣ ខែមេសា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.៩ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = x\ln(ax+b)$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y = x\ln(ax+b)$ ដែល $a \neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $x\ln x$ ។ ដោយប្រើរូបមន្ត (25) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y = x\ln(ax+b)\ (a \neq 0,\ ax+b > 0)$ គឺ

$$y^{(n)} = \frac{ax}{ax+b} + \ln(ax+b) \text{ ចំពោះ } n = 1$$

និង

$$\begin{aligned}y^{(\mathrm{n})} &= (-1)^{n-2}(n-2)!\,a^{n-1}[\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + \frac{(n-1)b}{(ax+b)^{n}}]\\ &= \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!\,a^{n-1}(ax+nb)}{(ax+b)^{n}} \quad (43)\end{aligned}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (43) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $x\ln x$ គឺ

$(x\ln x)^{(n)} = 1 + \ln x$ ចំពោះ $n = 1$

និង

$$(x\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!\,1^{n-1}(1x+n\cdot 0)}{(1x+0)^n}$$

$$=\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}\quad (44)$$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (43) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី២៩ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំនៅថ្ងៃទី៣ ខែមេសា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.១០ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{ax+b}\ln(\alpha x+\beta)$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y=e^{ax+b}\ln(\alpha x+\beta)$ ដែល $a\neq 0, \alpha\neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $e^x\ln(x+1)$ ។ ដោយប្រើរូបមន្ត (25), (23) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y=e^{ax+b}\ln(\alpha x+\beta)$ $(a\neq 0,\ \alpha\neq 0,\ \alpha x+\beta>0)$ គឺ

$$y^{(\mathrm{n})}=e^{ax+b}[a^n\ln(\alpha x+\beta)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-i-1}(n-i-1)!\alpha^{n-i}a^i}{(\alpha x+\beta)^{n-i}}C(n,i)]\quad (45)$$

ចំពោះគ្រប់ $\alpha x+\beta>0$ ។

ដោយយក $a=1, b=0, \alpha=1$ និង $\beta=1$ នោះពីរូបមន្ត (45) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $e^x\ln(x+1)$ គឺ

$$(e^x\ln(x+1))^{(n)}=(e^{1x+0}\ln(x+1))^{(n)}$$

$$=e^{1x+0}[1^n\ln(1x+1)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-i-1}(n-i-1)!\,1^{n-i}1^i}{(1x+1)^{n-i}}C(n,i)]$$

$$=e^x[\ln(x+1)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-i-1}(n-i-1)!}{(x+1)^{n-i}}C(n,i)]\quad (46)$$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N},\ x>-1$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (45) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី៥ ខែមេសា ឆ្នាំ២០២៣ និង បានផុសក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំនៅថ្ងៃទី១៩ ខែមេសា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.១១ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=x^2\ln(ax+b)$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y=x^2\ln(ax+b)$ ដែល $a\neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $x^2\ln x$ ។ ដោយប្រើរូបមន្ត (25) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y=x^2\ln(ax+b)$ $(a\neq 0,\ ax+b>0)$ គឺ

$$y^{(n)}=\frac{ax^2}{ax+b}+2x\ln(ax+b) \text{ ចំពោះ } n=1$$

$$y^{(n)}=-\frac{a^2x^2}{(ax+b)^2}+\frac{4ax}{ax+b}+2\ln(ax+b) \text{ ចំពោះ } n=2$$

និង

$$y^{(\text{n})}=(-1)^{n-3}(n-3)!\,a^{n-2}[\frac{2}{(ax+b)^{n-2}}+\frac{2(n-2)b}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{(n-1)(\text{n}-2)b^2}{(ax+b)^n}] \quad (47)$$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 3$ ។

ដោយយក $a=1$ និង $b=0$ នោះពីរូបមន្ត (47) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $x^2\ln x$ គឺ

$$(x^2\ln x)^{(n)}=\frac{1x^2}{1x+0}+2x\ln(1x+0) \;=x+2x\ln x \quad \text{ចំពោះ } n=1$$

$$(x^2\ln x)^{(n)}=-\frac{1^2x^2}{(1x+0)^2}+\frac{4(1)x}{1x+0}+2\ln(1x+0) \;=3+2\ln x \quad \text{ចំពោះ } n=2$$

និង

$$(x^2\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-3}(n-3)!\,1^{n-2}[\frac{2}{(1x+0)^{n-2}}+\frac{2(n-2)\cdot 0}{(1x+0)^{n-1}}+\frac{(n-1)(\text{n}-2)\cdot 0^2}{(1x+0)^n}]$$

$$=\frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} \quad (48)$$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 3$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (47) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី១ ខែសីហា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.១២ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=x^3\ln(ax+b)$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $y=x^3\ln(ax+b)$ ដែល $a\neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $x^3\ln x$ ។ ដោយប្រើរូបមន្ត (25) និង (27) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $y=x^3\ln(ax+b)$ $(a\neq 0,\, ax+b>0)$ គឺ

$$y^{(n)}=\frac{ax^3}{ax+b}+3x^2\ln(ax+b) \quad \text{ចំពោះ } n=1$$

$$y^{(n)}=-\frac{a^2x^3}{(ax+b)^2}+\frac{6ax^2}{ax+b}+6x\ln(ax+b) \quad \text{ចំពោះ } n=2$$

$$y^{(n)}=\frac{2a^3x^3}{(ax+b)^3}-\frac{9a^2x^2}{(ax+b)^2}+\frac{18ax}{ax+b}+6\ln(ax+b) \quad \text{ចំពោះ } n=3$$

និង

$$y^{(\mathrm{n})}=(-1)^{n-4}(n-4)!\,a^{n-3}[\frac{6}{(ax+b)^{n-3}}+\frac{6(n-3)b}{(ax+b)^{n-2}}+$$

$$+\frac{3(n-2)(n-3)b^2}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)b^3}{(ax+b)^n}]\quad(49)$$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 4$ ។

ដោយយក $a=1$ និង $b=0$ នោះពីរូបមន្ត (49) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $x^3\ln x$ គឺ

$$(x^3\ln x)^{(n)}=\frac{1x^3}{1x+0}+3x^2\ln(1x+0)\ =x^2+3x^2\ln x\quad \text{ចំពោះ } n=1$$

$$(x^3\ln x)^{(n)}=-\frac{1^2x^3}{(1x+0)^2}+\frac{6(1)x^2}{1x+0}+6x\ln(1x+0)\ =5x+6x\ln x\quad \text{ចំពោះ } n=2$$

$$(x^3\ln x)^{(n)}=\frac{2(1^3)x^3}{(1x+0)^3}-\frac{9(1^2)x^2}{(1x+0)^2}+\frac{18(1)x}{1x+0}+6\ln(1x+0)\ =11+6\ln x\quad \text{ចំពោះ } n=3$$

និង

$$(x^3\ln x)^{(\mathrm{n})}=(-1)^{n-4}(n-4)!\,1^{n-3}[\frac{6}{(1x+0)^{n-3}}+\frac{6(n-3)\cdot 0}{(1x+0)^{n-2}}+$$

$$+\frac{3(n-2)(n-3)0^2}{(1x+0)^{n-1}}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)0^3}{(1x+0)^n}]$$

$$=\frac{6(-1)^{n-4}(n-4)!}{x^{n-3}}\quad(50)$$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 4$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (49) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី៣ ខែសីហា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.១៣ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $\mathrm{y}=x^m e^{ax+b}$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $\mathrm{y}=x^m e^{ax+b}$ ដែល $a\neq 0$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $x^m e^x$ និង $x^n e^x$ ។ យើងមានរូបមន្ត (14) គឺ

$$((ax+b)^m)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))\,a^n(ax+b)^{m-n}\quad \text{ចំពោះ } n\in\mathbb{N} \text{ ។}$$

ដោយយក $a=1$ និង $b=0$ នោះពីរូបមន្ត (14) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ x^m គឺ

$$(x^m)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))1^n(1x+0)^{m-n}$$

$$=m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))\,x^{m-n}\quad(51)$$

ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ និង

$$(x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n} \qquad (52)$$

ចំពោះ $n, m \in \mathbb{N}; n \le m$ ។

ដោយប្រើរូបមន្ត (27), (23) និង (52) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $\mathrm{y} = x^m e^{a x+b}$ $(a \neq 0)$ គឺ

$$y^{(\mathrm{n})} = e^{a x+b} \sum_{i=0}^{n} C(n,i) \frac{m!}{(m-n+i)!}\, a^i x^{m-n+i}$$

$$= e^{a x+b} \sum_{k=0}^{n} C(n,n-k) \frac{m!}{(m-k)!}\, a^{n-k} x^{m-k} \qquad (53)$$

ដែល $C(n, k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $m \ge n \ge k$, $n,k \in \{0, 1, 2,...\}$ ។

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (53) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $x^m e^x$ គឺ

$$(x^m e^x)^{(n)} = e^x \sum_{i=0}^{n} C(n,i) \frac{m!}{(m-n+i)!} x^{m-n+i}$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} C(n,n-k) \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k} \quad (54)$$

ចំពោះ $n \le m$ ។

ករណីពិសេស បើ $m = n$ នោះរូបមន្ត (54) ទៅជា

$$(x^n e^x)^{(n)} = e^x \sum_{i=0}^{n} C(n,i) \frac{n!}{i!} x^i = e^x \sum_{i=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(i!)^2 (n-i)!} x^i$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} C(n,n-k) \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad (55)$$

ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ ។

សម្គាល់

រូបមន្ត (53) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី៤ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២៣ ។

៥.១៤ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $\mathrm{y} = u(x) e^{a x+b}$

យើងគណនាដេរីវេទី n នៃ $\mathrm{y} = u(x) e^{a x+b}$ ដែល $u = u(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទី១, ដេរីវេទី២, … , ដេរីវេទី n និង $a \neq 0$ ហើយទាញរកដេរីវេទី n នៃ $u(x) e^x$ ។

ដោយប្រើរូបមន្ត (27) និង (23) យើងបានដេរីវេទី n នៃ $\mathrm{y} = u(x) e^{a x+b}$ $(a \neq 0)$ គឺ

$$y^{(\mathrm{n})} = e^{ax+b}\sum_{k=0}^{n} a^k C(n,k)\, u^{(n-k)}(x)$$

$$= e^{ax+b}\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} C(n,k)\, u^{(k)}(x) \quad (56)$$

ដែល $C(n,k) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C(n, n-k);\ n \ge k,\ \ n,k \in \{0, 1, 2, ...\}$ ។

ដោយយក $a = 1$ និង $b = 0$ នោះពីរូបមន្ត (56) យើងទាញបានដេរីវេទី n នៃ $u(x)e^x$ គឺ

$$(u(x)e^x)^{(n)} = e^x \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, u^{(n-k)}(x)$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, u^{(k)}(x) \quad (57)$$ ។

ដោយ $\alpha^x = e^{\ln(\alpha^x)} = e^{x\ln\alpha}$ និង $\alpha^{ax+b} = e^{\ln(\alpha^{ax+b})} = e^{(ax+b)\ln\alpha} = e^{(a\ln\alpha)x+b\ln\alpha}$

នោះពីរូបមន្ត (23), (56) និង (57) យើងទាញបានរូបមន្ត

$$\left(\alpha^{ax+b}\right)^{(n)} = \left(e^{(a\ln\alpha)x+b\ln\alpha}\right)^{(n)}$$

$$= (a\ln\alpha)^n\, e^{(a\ln\alpha)x+b\ln\alpha}$$

$$= a^n \ln^n \alpha \cdot \alpha^{ax+b} \qquad (58)$$

$$\left(\alpha^x\right)^{(n)} = \ln^n \alpha \cdot \alpha^x \qquad (59)$$

$$(u(x)\alpha^{ax+b})^{(\mathrm{n})} = \alpha^{ax+b}\sum_{k=0}^{n} a^k \ln^k \alpha\, C(n,k)\, u^{(n-k)}(x)$$

$$= \alpha^{ax+b}\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \ln^{n-k} \alpha\ C(n,k)\, u^{(k)}(x) \quad (60)$$

និង

$$(u(x)\alpha^x)^{(\mathrm{n})} = \alpha^x \sum_{k=0}^{n} \ln^k \alpha\, C(n,k)\, u^{(n-k)}(x)$$

$$= \alpha^x \sum_{k=0}^{n} \ln^{n-k} \alpha\ C(n,k)\, u^{(k)}(x) \quad (61)$$ ។

សម្គាល់

ចំពោះរូបមន្ត (56) នេះ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី៥ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២៣ ។ ចំណែកឯរូបមន្ត (58), (60) និង (61) វិញ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី៧ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២៣ ។

សរុបមក អត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះផ្តល់នូវចំណេះដឹងអំពីដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ដូចជា ដេរីវេទី២ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍។ យើងមានការបញ្ចូលនិយមន័យនៃដេរីវេទី២ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ ទ្រឹស្តីបទ សម្រាយបញ្ជាក់ សម្គាល់ និង ឧទាហរណ៍មួយចំនួនផង ។ ជាពិសេស យើងខ្ញុំសិក្សាស្រាវជ្រាវបានរូបមន្តដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ចំនួន ៦១ ក្នុងនោះខ្ញុំរៀបរៀងបានរូបមន្តចំនួន ២៥ (រូបមន្ត (13), (19), (20), (21), (28), (30), (32), (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40), (41), (43), (45), (46), (47), (49), (53), (56), (58), (60), (61)) ដើម្បីចូលរួមចំណែកក្នុងការអភិវឌ្ឍចំណេះដឹងខាងផ្នែកទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យាលើវិស័យអប់រំ ។ ជាចុងក្រោយ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា អត្ថបទនេះ ជាឯកសារដ៏សំខាន់មួយសម្រាប់ជួយដល់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ និង អ្នកគ្រូ ដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងដេរីវេនៃអនុគមន៍ទាំងកម្រិតមធ្យមសិក្សា និង ឧត្តមសិក្សា ហើយយើងខ្ញុំនឹងរៀបរៀងយ៉ាងលម្អិតនូវរូបមន្តទាំង២៥នោះក្នុងសៀវភៅ **ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍៖ ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់** (ភាគទី២) ។

ឯកសារពិគ្រោះ

១. http://rac.gov.kh/posts/1350

២. https://activecalculus.org/single/sec-1-6-second-d.html

៣. https://en.wikipedia.org/wiki/Second_derivative

៤. https://mathstat.slu.edu/~may/ExcelCalculus/sec-4-5-SecondDerivativeConcavity.html

៥. https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative

៦. https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_210_Calculus_I_(Seeburger)/04%3A_Applications_of_Derivatives/4.08%3A_Derivatives_of_Parametric_Equations

៧. https://testbook.com/maths/leibnitz-theorem

៨. https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_derivative

៩. https://math.stackexchange.com/questions/690060/definition-of-second-derivative-as-a-limit

១០. https://byjus.com/maths/second-order-derivative/

១១. https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-2-new/ab-3-6/a/second-derivatives-review

១២. https://www.mathsisfun.com/calculus/second-derivative.html